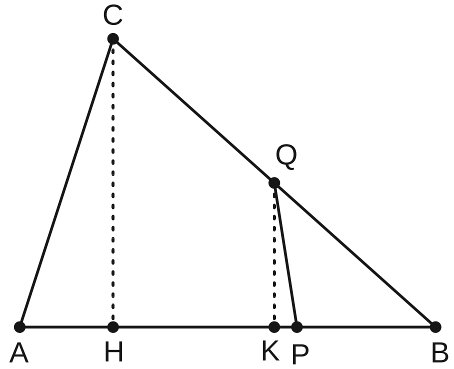
GARA DI MATEMATICA ON-LINE (10/12/2018)



1. IL QUADRO [845]

Riferendoci alla figura a lato, osserviamo che il triangolo PQB ha per base $PB=\frac{1}{3}AB$ e che l'altezza QK è la metà di CH, altezza di ABC. La relazione tra le aree dei due triangolo è:

$A_{PQB}=\frac{1}{2}\cdot PB\cdot QK=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}AB\cdot\frac{1}{2}CH=\frac{1}{6}A_{ABC}=\frac{1}{6}\cdot 5070=845\text{ cm}^2$.

2. L'ANTIFURTO [816]

Scegliendo con ripetizioni tre numeri nell'insieme $A=\{x\,|\,x\in\mathbb{N},0\le x\le 15\}$ esiste un solo modo per ordinare i tre numeri in modo che $0\le a\le b\le c\le 15$. Le possibili scelte sono $C^*_{16,3}=\binom{16+3-1}{3}=\binom{18}{3}=816$.

3. IL MESSAGGIO [1010]

Cerchiamo una formula generale che risolva il problema.

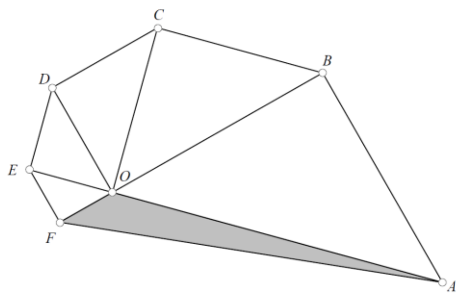
Sostituiamo in x con $\frac{1}{x}$ nell'equazione $f(x)+3x\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=2(x+1)$ ed otteniamo: $f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{3}{x}\cdot f(x)=2\left(\frac{1}{x}+1\right)$

da cui possiamo ricavare $f\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{3}{x}\cdot f(x)+2\left(\frac{x+1}{x}\right)$ che possiamo sostituire nell'equazione di partenza.

$$f(x)+3x\left(-\frac{3}{x}\cdot f(x)+2\left(\frac{x+1}{x}\right)\right)=2(x+1)$$
$$f(x)-9f(x)+6(x+1)=2(x+1)$$
$$f(x)=\frac{x+1}{2}$$

La soluzione richiesta dal problema è $f(2019)=\frac{2019+1}{2}=1010$.

4. IL CORRIDOIO D'INGRESSO [6084]



Osserviamo che

$$OA=OB\sqrt{2}=OC\left(\sqrt{2}\right)^2=OD\left(\sqrt{2}\right)^3=OE\left(\sqrt{2}\right)^4=OF\left(\sqrt{2}\right)^5=4\sqrt{2}OF$$

Da cui si ricava che $OF=\frac{1}{4\sqrt{2}}OA$.

Siccome $F\hat{O}A=2\pi-5\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi$, l'area del triangolo AOF vale

$$A_{AOF}=\frac{1}{2}312\cdot\frac{312}{4\sqrt{2}}\cdot sen\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{1}{2}312\cdot\frac{312}{4\cancel{\sqrt{2}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{2}=78^2=6084\text{ m}^2.$$

5. LA SPARTIZIONE DELLA COLLANE [165]

Assegnate le 3 collane a ciascuno dei complici, restano ancora 8 collane da distribuire, magari alle stesse persone. Si tratta di scegliere, con ripetizione, tra i 4 complici, chi riceverà un'altra collana.

In definitiva, ci sono $C^*_{4,8}=\binom{4+8-1}{8}=\binom{11}{8}=165$ modi possibili.

6. LA PREPARAZIONE DELLA SQUADRA [24]

Ponendo $k = ab + bc + ac$, il problema può essere visto nella forma

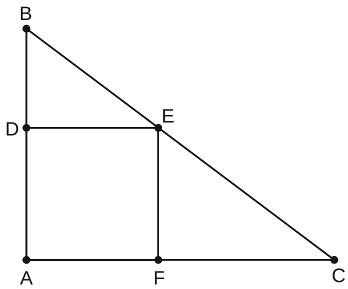
$$\begin{cases} a^2 = 182 - k \\ b^2 = 294 - k \\ c^2 = 273 - k \end{cases}$$

Si tratta quindi di trovare il valore di k che rende i tre valori del sistema tre quadrati perfetti.
Si potrebbe procedere per tentativi successivi, visto che, ad esempio, nella prima equazione $1 \le a \le 13$.
Per evitare calcoli inutili possiamo sostituire k sfruttando la seconda e la terza equazione. Dalla terza si ottiene $k = 273 - c^2$, che inserita nella seconda ci permette di trovare $b^2 = 21 + c^2$ che può essere scritta $b^2 - c^2 = 21$ ovvero $(b-c)(b+c) = 21$.
Siccome $21 = 3 \cdot 7$, abbiamo due sole possibilità da verificare: $(b,c) = (5,2)$ oppure $(b,c) = (11,10)$. La prima è da scartare in quanto non esisterebbe alcun valore per a.
La soluzione cercata è $(a,b,c) = (3,11,10)$ e quindi il risultato richiesto è $a + b + c = 3 + 11 + 10 = 24$.

7. I COMPLICI [28]

Osserviamo che se $100a + 10b + c \equiv 0 \bmod 37$, allora anche $(100a + 10b + c) \cdot 10 \equiv 0 \bmod 37$, ma
$1000a + 100b + 10c \equiv a + 100b + 10c \bmod 37$ in quanto $1000 \equiv 1 \bmod 37$.
Questo ci assicura che tutti i multipli di 37 verificano la condizione richiesta.
Da $\overline{abc} = 0 = 37 \cdot 0$ ad $\overline{abc} = 999 = 37 \cdot 27$ vi sono 28 valori possibili.

8. LA TECA [1296]



Detto x il lato del quadrato inscritto all'interno del triangolo. I triangoli BDE e EFC sono simili, e quindi vale la relazione $63 - x : x = x : 84 - x$, dalla quale si ricava $x = 36$ cm.
L'area del quadrato misura $36^2 = 1296\ \text{cm}^2$.

9. L'AIUTANTE DI KOSENO [4218]

Siccome $189 = 3^3 \cdot 7$ i numeri cercati devono avere per forza le cifre 3, 7 e 9.
La somma di tutti può essere trovata velocemente osservando che ciascuna delle cifre comparirà due volte al posto delle centinaia, decine e unità e quindi vale $222(a + b + c) = 222 \cdot 19 = 4218$.

10. IL MAGAZZINO IN RUE DE L'HOSPITAL [37]

Scriviamo la sequenza alla ricerca di un periodo.

1) 25	5) $8^2 + 9^2 = 145$	9) $4^2 = 16$
2) $2^2 + 5^2 = 29$	6) $1^2 + 4^2 + 5^2 = 42$	10) $1^2 + 6^2 = 37$
3) $2^2 + 9^2 = 85$	7) $4^2 + 2^2 = 20$	11) $3^2 + 7^2 = 58$
4) $8^2 + 5^2 = 89$	8) $2^2 = 4$	12) $5^2 + 8^2 = 89$ --> come 4)

Da questo punto in poi i valori si ripeteranno sempre con lo stesso ordine.
Tolti quindi i primi 4 valori, abbiamo trovato un periodo di 8.
Siccome $(2018 - 4) \equiv 6 \bmod 8$, il $2018°$ termine sarà uguale al sesto della sequenza periodica, e cioè 37.

11. GLI ALLIEVI DI KOSENO [7]

Indichiamo con a_1, a_2, … a_{16} il numero di problemi risolti da ciascuno studente. Per quanto affermato $a_1 + a_2 + \ldots + a_{16} \le 15 \cdot 16 = 240$.
Indichiamo con x_1, x_2, … x_{30} il numero degli studenti che hanno risolto il problema 1, il problema 2, etc.
Per quanto affermato accade che $x_1 + x_2 + \ldots + x_{30} \ge 8 \cdot 30 = 240$
Siccome $a_1 + a_2 + \ldots + a_{16} = x_1 + x_2 + \ldots + x_{30}$ si deduce che $x_i = 8\ \ \forall i$ e $a_j = 15\ \ \forall j$.
Quindi $\binom{16}{2} \cdot n = \binom{8}{2} \cdot 30$ che ha soluzione $n = 7$.

12. LA COMBINAZIONE DELLA CASSAFORTE [6953]

L'insieme assegnato contiene 17 valori congrui a 0, 1 e $2 \mod 3$.
Un sottoinsieme di 3 elementi avrà somma multipla di 3 se i tre valori saranno della stessa classe di congruenza, oppure ognuno appartiene a classi diverse.

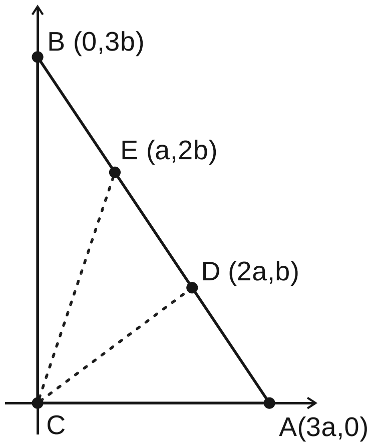
In totale avremo dunque $\binom{17}{3} \cdot 3 + 17^3 = 6953$ sottoinsiemi possibili.

13. IL BIGLIETTO PERDUTO [31]

Fattorizzando sia $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$ che $256 = 2^8$ si nota che nel prodotto $(a-1)(a+1)$ dobbiamo trovare ben 8 fattori 2. I due numeri sono certamente pari entrambi, ma se uno è divisibile per 4 l'altro non lo può essere.

I valori a cercati dovranno essere quindi del tipo $a = k \cdot 2^7 \pm 1$. Siccome $\lfloor 2018 : 128 \rfloor = 15$, abbiamo in tutto 15 soluzioni del tipo $k \cdot 2^7 - 1$ ($1 \le k \le 15$) e 16 soluzioni del tipo $k \cdot 2^7 + 1$ ($0 \le k \le 15$) per un totale di 31 soluzioni.

14. ESAMI [234]



Costruiamo un sistema di assi cartesiano centrato in C. Sia $AC = 3a$ e $AB = 3b$. Con queste condizioni risulta che $D(2a, b)$ e $E(a, 2b)$.

Usando la formula della distanza abbiamo che

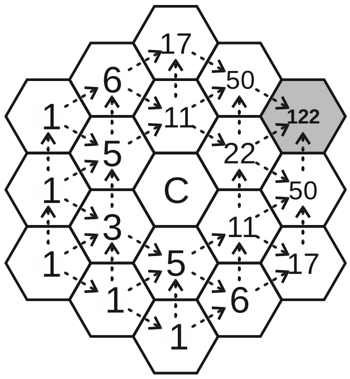
$4a^2 + b^2 = 49$ e $a^2 + 4b^2 = 81$.

Sommando tra loro le due equazioni si ottiene che $5a^2 + 5b^2 = 130$, cioè $a^2 + b^2 = 26$.

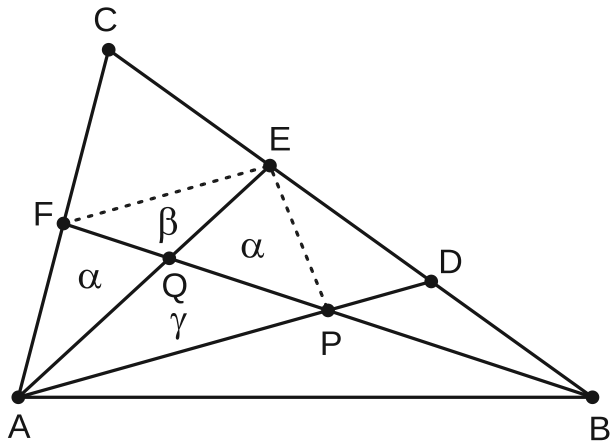
$AB = \sqrt{9a^2 + 9b^2} = \sqrt{9(a^2 + b^2)} = \sqrt{9 \cdot 26} = \sqrt{234}$ cm.

15. IL PAVIMENTO LASTRICATO [122]

Riportando le possibilità sullo schema, e sommando i valori sulla coda delle frecce si ottiene il diagramma a fianco riportato. Nella casella grigia si trova il numero di tutti i possibili percorsi.



16. LA MAPPA DELLA STANZA DEL TESORO [99]



Sia S l'area del triangolo ABC. Dalle informazioni del problema si determina immediatamente che:

$$A_{ACE} = A_{AED} = A_{ADB} = \frac{1}{3}S$$

$$A_{ABF} = A_{CBF} = \frac{1}{2}S.$$

Tracciamo i segmenti EF e PE.

Si osserva che $FE // AD$ in quanto E punto medio di CD e F punto medio di AC, inoltre $A_{CFE} = \frac{1}{4}A_{CAD} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}S = \frac{1}{6}S$.

Dal parallelismo tra FE e PD si osserva anche che

$$A_{PDB} = \frac{1}{4}A_{FEB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}S - \frac{1}{6}S\right) = \frac{1}{12}S.$$

Per costruzione $A_{PDE} = A_{PDB} = \frac{1}{12}S$ e quindi $A_{APB} = \frac{1}{3}S - \frac{1}{12}S = \frac{1}{4}S$.

Consideriamo ora il trapezio $FEPA$ e chiamiamo α, β e γ le parti in cui è diviso, come in figura.

Dalle proprietà del trapezio si sa che $\alpha^2 = \beta\gamma$. Per quanto calcolato finora possiamo scrivere che

$\alpha + \gamma + \frac{1}{4}S = \frac{1}{2}S$ e $\alpha + \beta + \frac{1}{6}S = \frac{1}{3}S$.

Ricavando β e γ dalle ultime due relazioni e sostituendo nella prima otteniamo con semplici calcoli che

$\alpha = \frac{1}{10}S$, $\gamma = \frac{3}{20}S$.

$$\frac{A_{APQ}}{A_{PDEQ}} = \frac{\gamma}{\alpha + A_{PDE}} = \frac{\frac{3}{20}\cancel{S}}{\frac{1}{10}\cancel{S} + \frac{1}{12}\cancel{S}} = \frac{9}{11}.$$

La risposta al problema è $pq = 9\cdot 11 = 99$.

17. LE CELLULE FOTOELETTRICHE [192]

Siano $S = a+b+c = 12$, $Q = ab+ac+bc = 35$ e $P = abc = 20$ le relazioni tra coefficienti e soluzioni dell'equazione assegnata. Siano $x_1 = a+b-c$, $x_2 = a-b+c$ e $x_3 = -a+b+c$ le tre radici del polinomio $P(x)$.

Dobbiamo calcolare il valore di $p+q+r$. Ricordando ancora una volta le formule di Viète sulle relazioni tra radici e coefficienti diventa: $p+q+r = -(x_1+x_2+x_3) + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_2) - x_1x_2x_3$. Aggiungendo 1 ad ambo i membri dell'ultima uguaglianza otteniamo:

$$p+q+r+1 = 1 - x_1 - x_2 - x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_2 - x_1x_2x_3 = (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$$

Sostituendo x_1, x_2 e x_3 la relazione diventa

$$p+q+r+1 = (1-a-b+c)(1-a+b-c)(1+a-b-c) = (1-S+2c)(1-S+2b)(1-S+2a)$$

$$= (2a-11)(2b-11)(2c-11) = 8P - 11\cdot 4Q + 11^2\cdot 2S - 11^3 = 8\cdot 20 - 44\cdot 35 + 242\cdot 12 - 1331 = 193.$$

$$p+q+r = 192.$$

18. LA SERA DELL'INAUGURAZIONE [109]

Poiché m^2-2n divide n^2+2m accade che $m^2-2n\le n^2+2m$, cioè, aggiungendo 1 e cambiando l'odine dei termini: $m^2-2m+1\le n^2+2n+1$, cioè $(m-1)^2\le(n+1)^2$ e quindi $m\le n+2$.
Analogamente, vista la simmetria del problema, deve accadere che $n\le m+2$.
Sfruttando ancora la simmetria, limitiamo ci a studiare i tre casi $n=m$, $n=m+1$ e $n=m+2$.

- $n=m$: $\dfrac{m^2+2m}{m^2-2m}=\dfrac{m+2}{m-2}=1+\dfrac{4}{m-2}$ che è intero per $m=1$, $m=3$, $m=4$ e $m=6$. Le coppie che risolvono il problema sono $(1;1)$, $(3;3)$, $(4;4)$ e $(6;6)$. La prima è da scartare perché i due numeri devono essere positivi.
- $n=m+1$: $\dfrac{m^2+2n}{n^2-2m}=\dfrac{m^2+2m+2}{m^2+1}=1+\dfrac{2m+1}{m^2+1}$
  - Se $m=1$, $\dfrac{2m+1}{m^2+1}=\dfrac{3}{2}$.
  - Se $m=2$, $\dfrac{2m+1}{m^2+1}=\dfrac{5}{5}=1$, ma $\dfrac{n^2+2m}{m^2-2n}=\dfrac{3^2+4}{2^2-6}=-\dfrac{13}{2}$ non è intero.
  - Se $m\ge3$ allora $0<\dfrac{2m+1}{m^2+1}<1$ e quindi non vi sono soluzioni possibili.
- $n=m+2$: $\dfrac{m^2+2n}{n^2-2m}=\dfrac{m^2+2m+4}{m^2+4m+4-2m}=1$ e $\dfrac{n^2+2m}{m^2-2n}=\dfrac{m^2+4m+4+2m}{m^2-2m-4}=1+\dfrac{8m+8}{m^2-2m-4}$.
  Dovendo essere intero. Deve essere che $m^2-2m-4\le 8m+8$ da cui si ricava che $m\le11$. Esaminando i valori uno alla volta si trova che solo 2, 3 e 4 verificano il problema. Le coppie cercate sono $(2;4)$, $(3;5)$ e $(4;6)$ di cui solo l'ultima è valida per il problema, visto che i due numeri devono essere positivi.

Le coppie che verificano il problema sono $(3;3)$, $(4;4)$, $(6;6)$ $(4;6)$ e $(6;4)$.
Il valore richiesto dal problema è $3\cdot3+4\cdot4+6\cdot6+4\cdot6+6\cdot4=109$.

19. KOSENO VIENE SCOPERTO [60]

Sia $x=\sqrt{a-1}$ e quindi $a=x^2+1$. $y=\sqrt{b-4}$ e quindi $b=y^2+4$. $z=\sqrt{c-9}$ e quindi $c=z^2+9$ e infine $k=\sqrt{d-16}$ e quindi $d=k^2+16$.

Sostituiamo nell'equazione e svolgiamo i calcoli: $x+2y+3z+4k=\dfrac{x^2+1+y^2+4+z^2+9+k^2+16}{2}$

$x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2-6z+9+k^2-8k+16=0$

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2+(k-4)^2=0$

Equazione che ha solo la soluzione $x=1$, $y=2$, $z=3$ e $k=4$, e quindi $a=2$, $b=8$, $c=18$ e $d=32$
Il valore richiesto è $a+b+c+d=2+8+18+32=60$.

20. LA FUGA DI KOSENO [1055]

Il caso peggiore, quindi con n massimo, lo otteniamo quando prendiamo $A=B=\{0,1,2,...,(n-1)\}$.

Otteniamo tutti i valori possibili tra 0 e $2n-2$. Il valore massimo cercato è $2n-2=2018$, $n=1010$.
Per il caso migliore, con n minimo, cerchiamo di organizzare i due insiemi A e B in modo che non succeda che per qualche $a_1\ne a_2\in A$ e $b_1\ne b_2\in B$ $a_1+b_1=a_2+b_2$.

Costruiamo gli insiemi in questo modo: $A=\{0,1,2,...,(n-1)\}$ e $B=\{0,n,2n,...,(n-1)n\}$.

In questo modo $A+B$ contiene esattamente n^2-1 valori diversi. Il più piccolo n per cui $n^2-1\ge2018$ è $n=45$.
Ovviamente per non avere valori più grandi di 2018 basterà "aggiustare" l'ultimo valore di B in modo da avere qualche ripetizione e terminare con 2018 (al posto di $44\cdot45=1980$, ultimo valore di B basterà mettere 1974).