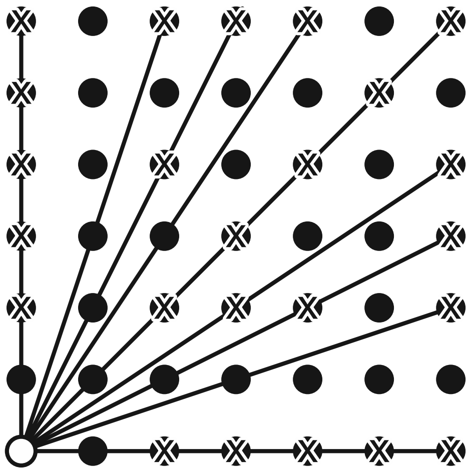
GARA DI MATEMATICA ON-LINE (8/11/2021)

1. BUON COMPLEANNO S. [50]

$aba_7 = cc_9$, quindi $49a + 7b + a = 9c + c$ cioè $50a + 7b = 10c$, non potendo essere b un multiplo di 10, $b = 0$. L'equazione, semplificata diventa $5a = c$. Siccome sia a che c sono cifre, $a = 1$ e $c = 5$.
Il numero cercato è 50… come gli anni che compio oggi. (se non si fosse ancora capito).

2. GLI ALBERI [25]



La soluzione in figura. Rimangono visibili 25 alberi.

3. SE LA VITA FOSSE SOLO UN CONTO… [1971]

$$\sqrt[2]{\frac{1972^3 - 1970^3 - 2}{6}} = \sqrt[2]{\frac{1972^3 - (1972-2)^3 - 2}{6}} = \sqrt[2]{\frac{\cancel{1972^3} - \cancel{1972^3} + 6 \cdot 1972^2 - 12 \cdot 1972 + 8 - 2}{6}}$$

$$\sqrt[2]{\frac{\cancel{6} \cdot (1972^2 - 2 \cdot 1972 + 1)}{\cancel{6}}} = \sqrt[2]{(1972-1)^2} = 1971.$$

4. LA MATEMATICA SARÀ IL MIO MESTIERE [8]

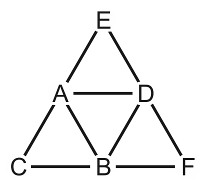
Osserviamo che nell'equazione $8x + y + 12z = 62$, y deve essere un multiplo di 2. Sia $y = 2a$. L'equazione diventa $4x + a + 6z = 31$. Ora a deve essere un numero dispari, quindi del tipo $a = 2b + 1$ (di conseguenza $y = 4b + 2$). L'equazione diventa $4x + 2b + 1 + 6z = 31$ cioè $2x + b + 3z = 15$.
b può essere nullo mentre x e z no, inoltre b e z devono avere parità diversa. Sia $x = k + 1$ e $z = h + 1$. L'equazione porta a $2k + b + 3h = 10$.
Cerchiamo ora di minimizzare $k + b + h$. Con $h = 3$ avremmo $k = 0$ e $b = 1$ che porta alla terna $(x, y, z) = (1, 6, 3)$. Se invece $h = 2$ il minimo lo otteniamo con $k = 2$ e $b = 0$ collegato alla terna $(x, y, z) = (3, 2, 3)$ che è proprio il minimo cercato: $x + y + z = 8$.

5. LA MIA AUTO È UN CUBO (COSÌ MI HANNO DETTO) [1301]

Si tratta di procedere per tentativi a partire da tutte le possibili somme di due cubi.
Con un po' di pazienza si trova che i soli autocubi di tre cifre sono $153 = 125 + 27 + 1$; $370 = 343 + 49$; $371 = 343 + 49 + 1$ e $407 = 343 + 64$.

6. COMPITO IN CLASSE [3]

Rappresentiamo graficamente la relazione "posso copiare da", come nella figura a fianco. Possiamo notare che con tre compiti diversi otteniamo l'obiettivo. Infatti assegnando il medesimo compito ad E e a B, uno diverso ad A e ad F ed infine il terzo a C e a D, nessuno avrà modo di copiare.



7. INCUBI NOTTURNI [9]

Riscriviamo l'equazione facendo un po' di conti:

$$\frac{\frac{\cancel{pq+1}}{q}}{\frac{\cancel{pq+1}}{p}}=19$$

$p=19q$.

$p+q<200$ diventa $20q<200$, cioè $0<q<10$, quindi 9 possibili soluzioni.

8. IL MIO PRIMO AMORE: IL CALCOLO COMBINATORIO [1440]

Consideriamo le due "N" come una sola lettera e consideriamo solamente le consonanti. Queste le possiamo permutare in $4!$ modi. Ora scegliamo l'odine delle vocali $\frac{4!}{2}$ modi e inseriamole tra le consonanti $\binom{5}{4}=5$ modi.

In totale vi sono $4!\cdot\frac{4!}{2}\cdot 5=1440$ anagrammi possibili.

9. IL MIO SECONDO AMORE: L'ALGEBRA [1971]

$$x+\frac{x}{1+2}+\frac{x}{1+2+3}+\ldots+\frac{x}{1+2+3+\ldots+3941}=3941$$

$$x\left(1+\frac{1}{\frac{2\cdot 3}{2}}+\frac{1}{\frac{3\cdot 4}{2}}+\ldots+\frac{1}{\frac{3941\cdot 3942}{2}}\right)=3941$$

$$2x\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{3941\cdot 3942}\right)=3941$$

Ora siccome in generale $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$, l'equazione diventa

$2x\left(1-\frac{1}{3942}\right)=3941$, cioè

$2x\cdot\frac{3941}{3942}=3941$ e quindi

$x=1971$.

10. TDN NON È PROPRIO IL MIO FORTE… [4]

Riscriviamo l'equazione in modo diverso:

$x^2+y^2=(xy)^2-2xy+1$ cioè

$(x+y)^2-(xy)^2=1$ che possiamo scrivere fattorizzando il primo termine in

$(x+y+xy)(x+y-xy)=1$

Essendo numeri interi, dovrà necessariamente essere:

$$\begin{cases} x+y+xy=\pm 1 \\ x+y-xy=\pm 1 \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro si ha $2xy=0$.

Le soluzioni possibili sono dunque quattro e cioè $(0,1)$ $(0,-1)$ $(1,0)$ $(-1,0)$.

11. GEOMETRIA S'HA DA FARE [2325]

Osserviamo che $F\hat{B}I = I\hat{B}H = F\hat{I}B$ (perché BI è bisettrice e FI è parallela a BC.

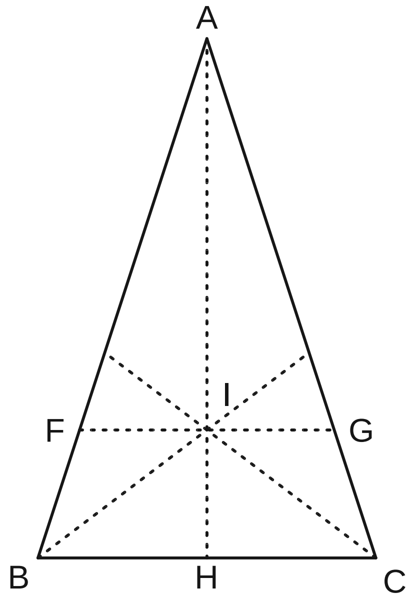
Detto $x = FB = FI = IG = GC$ Abbiamo che i due triangoli ABC e AFG sono simili.

Quindi $AB : AF = BC : FG$ e cioè $117 : (117 - x) = 90 : 2x$, facendo i calcoli $x = \frac{65}{2}$ cm. $FG = 65$ cm.

Sfruttando Pitagora otteniamo $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{117^2 - 45^2} = 108$ cm.

Sempre sfruttando la similitudine; $BC : FG = AH : AI$ e quindi $90 : 65 = 108 : AI$ che ci porta a calcolare $AI = 78$ cm.

$$A_{BFGC} = A_{ABC} - A_{AFG} = \frac{90 \cdot 108}{2} - \frac{65 \cdot 78}{2} = 2325 \text{ cm}^2.$$



12. HO UNA COLLEZIONE DI DADI [109]

Calcoliamo la probabilità che dopo il primo lancio di dado, il primo dado mostri una faccia rossa:

$$P(R) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} + \ldots + \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{6} = \frac{1}{36}(1+2+3+\ldots+6) = \frac{7}{12}$$

La probabilità di ottenere bianco con il secondo dado è la medesima (vista la simmetria).

Quindi la probabilità di ottenere un bianco ed un rosso tirando due dadi è:

$$P(\text{uno B ed uno R}) = P(B-R) + P(R-B) = \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} + \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{74}{144} = \frac{37}{72}$$

La risposta richiesta è $37 - 72 = 109$.

13. UNA FUNZIONE TUTTA DA SCOPRIRE [5050]

Sapendo che $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$ e che $f(4) = 10$. Determina $f(100)$

Calcoliamo $f(2)$ ponendo $x = y = 2$: $f(4) = f(2) + f(2) + 4$ e quindi $f(2) = 3$.

Calcoliamo $f(1)$ ponendo $x = y = 1$: $f(2) = f(1) + f(1) + 1$ e quindi $f(1) = 1$.

Infine calcoliamo $f(0)$ ponendo $x = y = 0$: $f(0) = f(0) + f(0)$ e quindi $f(0) = 0$.

Poniamo ora $y = 1$.

$f(x+1) = f(x) + (x+1)$, quindi

$$f(100) = f(99) + 100 = f(98) + 99 + 100 = \ldots = 1 + 2 + 3 + ..+ 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050.$$

La funzione è proprio $f(x) = \frac{x(x+1)}{2}$.

14. FORTUNA O PROBABILITÀ? [555]

Le cinquine possibili sono $\binom{20}{5}$.

Calcoliamo quelle che non hanno alcun numero consecutivo. Per fare questo prendiamo un insieme di 16 elementi e scegliamone 5. Ora aggiungendo 1 al secondo, 2 al terzo, 3 al quarto e 4 al terzo, otteniamo una cinquina di un insieme di 20 elementi, che non hanno alcun elemento consecutivo (perché li abbiamo allontanati noi). Il numero di cinquine sono $\binom{16}{5}$.

La probabilità cercata è $P(\text{almeno 2 numeri consecutivi}) = 1 - \frac{\binom{16}{5}}{\binom{20}{5}} = 1 - \frac{91}{323} = \frac{232}{323}$.

La risposta richiesta è $232 + 323 = 555$.

15. FISICA !!! [16]

Sia n il numero delle auto che riescono a passare; allora l'ultima che passa, la n-esima, comincia a muoversi dopo $t_1 = 2(n-1)$ secondi da quando scatta il verde. Detta d la distanza tra l'n-esima automobile ed il semaforo, il tempo t_2 impiegato da tale auto per raggiungere il semaforo, dopo che si mette in moto, è $t_2 = \frac{d}{10}$, dove è $d = 6(n-1)$, visto che tra due auto consecutive vi è una distanza di 6 m. Ne consegue che il tempo t totale impiegato dall'ultima slitta a raggiungere il semaforo è: $\frac{6(n-1)}{10} + 2(n-1)$ e tale tempo deve essere minore, o al più, uguale, a 40 s.

$\frac{3(n-1)}{5} + 2(n-1) \le 40$,

$3n - 3 + 10n - 10 \le 200$

$13n \le 213$

$n \le 16{,}38$ da cui si ricava che $n = 16$.

16. ADORO I GIOCHI DA TAVOLO [4547]

Calcoliamo la probabilità di vittoria del difensore al primo attacco. Qualunque sia il valore ottenuto, l'attaccante deve ottenere due valori uguali o inferiori:

$$P(\text{Dif. vince I attacco}) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{6}{6}\cdot\frac{6}{6} = \frac{1}{6}\left(\frac{1+4+9+16+25+36}{36}\right) = \frac{91}{216}.$$

La probabilità di vincere lo scontro una armata contro una armata è

$$P(\text{Dif. vince II attacco}) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{6}{6} = \frac{1}{6}\left(\frac{1+2+3+4+5+6}{6}\right) = \frac{7}{12}.$$

E quindi

$P(\text{vince Dif}) = \frac{91}{216}\cdot\frac{7}{12} = \frac{637}{2592}$ e di conseguenza $P(\text{vince Att}) = 1 - P(\text{vince Dif}) = 1 - \frac{637}{2592} = \frac{1955}{2592}$.

La riposta richiesta è $1955 + 2592 = 4547$.

17. BELLO BELLO.. BELLO !!! [104]

Il prodotto delle altre due radici vale $\frac{-2021}{43} = -47$, quindi esistono a e b tali che

$x^4 + 15x^3 - kx^2 + 1095x - 2021 = (x^2 + ax + 43)(x^2 + bx - 47)$

Sviluppando il secondo prodotto si ottiene il polinomio $x^4 + (a+b)x^3 + (ab-4)x^2 + (43b - 47a)x - 2021$.

Uguagliando i coefficienti si ha che

$\begin{cases} a + b = 15 \\ 43b - 47a = 1095 \end{cases}$ che risolto porta a $\begin{cases} a = -5 \\ b = 20 \end{cases}$

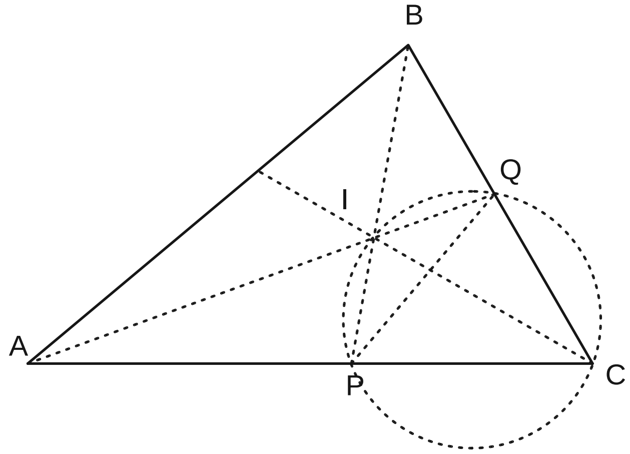
$k = -ab + 4 = 100 + 4 = 104$.

18. PARERI PERSONALI [6464]

Detti 2α l'angolo in A e 2β l'angolo in B, osservando il triangolo AIB, l'angolo $P\hat{I}Q = A\hat{I}B = 180 - (\alpha + \beta)$.

Per i quadrilateri ciclici, $P\hat{C}Q = \alpha + \beta$.

La somma degli angoli interni di ABC vale $3\alpha + 3\beta = 180°$ e quindi $\alpha + \beta = 60°$. Se $P\hat{C}Q = 60°$, allora $P\hat{C}I = I\hat{C}Q = 30°$ Per il Teorema della corda $PI = QI = 2r\,\text{sen}\,30° = r$ e $PQ = 2r\,\text{sen}\,60°$ e quindi $30 = r\cdot\sqrt{3}$ da cui si ricava $r = 10\sqrt{3}\text{ m}$.



$PI + QI + PQ = 10\sqrt{3} + 10\sqrt{3} + 30 = 20\sqrt{3} + 30\text{ m} \cong 64{,}642\text{ m} = 6464{,}2\text{ cm}$.

19. HO PIÙ DI UN CERCHIO ALLA TESTA [9704]
<u>Prima soluzione</u>
Risolviamo il problema in maniera ricorsiva. Sia a_n il maggior numero possibile di regioni che n circonferenze formano intersecandosi.
Osserviamo che tracciate n circonferenze, l'$n+1$-esima interseca le altre n aggiungendo $2n$ regioni. Quindi $a_{n+1}=a_n+2n$. Essendo $a_1=2$, la risposta al problema è il valore di a_{99}.
$a_{99}=a_{98}+2\cdot 98=a_{97}+2(97+98)=...=a_1+2(1+2+...+98)=2+2(1+2+...+98)=2+98\cdot 99=9704$.

<u>Seconda soluzione</u>
Immaginiamo di deformare la struttura creata dalle 99 circonferenze chiudendo la superfice esterna a tutte le circonferenza in modo da formare un solido. Per La formula di Eulero della Geometria Solida $F+V-S=2$. Ora le facce (F) sono proprio le regioni in cui è stato diviso il piano di partenza, prima della deformazione. Vediamo se riusciamo a determinare i vertici (V) e gli spigoli (S).
I vertici sono i punti di intersezione. Per ottenere il massimo ogni due circonferenze si devono incontrare in due punti: $V=2\cdot\binom{99}{2}$. Gli spigoli sono i tratti di circonferenza che uniscono due vertici. Prese due circonferenze qualunque, si ottengo quattro spigoli perché le due circonferenze si intersecano in due punti: $S=4\cdot\binom{99}{2}$.
Abbiamo quindi: $F=2+S-V=2+4\cdot\binom{99}{2}-2\cdot\binom{99}{2}=2+2\cdot\binom{99}{2}=2+98\cdot 99=9704$.

20. QUALCOSA CHE IO ADORO !!! [5544]
Scomponiamo il problema: orizzontale, verticale
5 destra-sinistra , nessuno in alto-basso. Il problema è equivalente al problema dei percorsi su una griglia 5×5 che non oltrepassano la diagonale. Problema risolto dai numeri di Catalan: C_5;
4 destra-sinistra: C_4; 1 in alto-basso (C_1). Nella sequenza OOOOOOOOVV devo scegliere l'ordine in $\binom{10}{2}$ modi;
3 destra-sinistra C_3 - 2 in alto-basso C_2. Nella sequenza OOOOOOVVVV devo scegliere l'ordine in $\binom{10}{4}$ modi;
2 destra-sinistra C_2 - 3 in alto-basso C_3. Nella sequenza OOOOVVVVVV devo scegliere l'ordine in $\binom{10}{6}$ modi;
1 destra-sinistra C_1 - 4 in alto-basso C_4. Nella sequenza OOVVVVVVVV devo scegliere l'ordine in $\binom{10}{8}$ modi;
0 destra-sinistra C_0 - 5 in alto-basso C_5.

In totale $2\left(42\cdot 1+14\cdot 1\cdot 45+2\cdot 5\cdot 210\right)=5544$.