IV Trofeo COPERNICO

Gara a squadre di Matematica (14 marzo 2019)

SOLUZIONI

GAUSS OF THRONES

N°	PROBLEMA	RISPOSTA
1	GIOCHI PROIBITI	0031
2	RIFLESSIONI DI UNA SPOSA	0671
3	I LANNISTER PAGANO SEMPRE I LORO DEBITI	0029
4	NATA DALLA TEMPESTA	2184
5	LE NOZZE ROSSE	1569
6	LA BATTAGLIA DEI BASTARDI	2018
7	TYRION SCAPPA DA APPRODO DEL RE	0009
8	AGO	0056
9	LA CORONA DORATA	4582
10	WINTER IS COMING	9216
11	I GIOCHI DI JOFFREY	6024
12	LA BATTAGLIA DELLE ACQUE NERE	0013
13	IL GRANDE TEMPIO DI BAELOR	1201
14	HODOR	2020
15	CASTEL GRANITO	0072
16	METALUPI, LEONI E DRAGHI	2809
17	LA DONNA ROSSA	0012
18	IL DRAGO E IL LUPO	9898
19	OLTRE LA BARRIERA	3038
20	LA BIBLIOTECA DELLA CITTADELLA	0288

1. GIOCHI PROIBITI
Soluzione: la risposta è **0031**
Indicando con a_n il numero di rimbalzi all'n-esimo lancio, si ha:

$$a_n = 8 + \sum_{k=1}^{n-1}[13 + 6(k-1)] = 8 + 7(n-1) + 6\frac{n(n-1)}{2} = 3n^2 + 4n + 1$$

Si tratta dunque di risolvere l'equazione $3n^2 + 4n + 1 = 3008$ che ha come soluzione intera positiva $n = 31$.

2. RIFLESSIONI DI UNA SPOSA
Soluzione: la risposta è **0671**
Osserviamo che, dato il poligono regolare $A_1A_2 \dots A_n$, si ottiene un poligono stellato con le caratteristiche richieste se si unisce l'i-esimo vertice con il vertice A_{i+k} con k e n coprimi e $k < n$. Pertanto i poligoni stellati sono $\frac{\varphi(n)}{2}$ (si deve dividere per 2 perché lo spostamento di k vertici e quello di $n-k$ vertici individuano lo stesso poligono stellato). Tra questi è conteggiato anche il poligono regolare, dato che corrisponde ad un poligono stellato con spostamento $k = 1$. Il numero richiesto è dunque:

$$\frac{\varphi(2019)}{2} - 1 = \frac{\varphi(3)\cdot\varphi(673)}{2} - 1 = \frac{2\cdot 672}{2} - 1 = 671$$

3. I LANNISTER PAGANO SEMPRE I LORO DEBITI
Soluzione: la risposta è **0029**
Indicato con n il numero di monete su ogni lato dell'esagono di base, osservando la figura si nota che la somma delle monete delle file centrali è $\sum_{i=1}^{2n-1} i$, mentre quelle delle file adiacenti sono $\sum_{i=1}^{2n-2} i$, $\sum_{i=1}^{2n-3} i, \dots, \sum_{i=1}^{n+1} i, \sum_{i=1}^{n} i$. Pertanto la somma di tutte le monete è:

$$S = \sum_{i=1}^{2n-1} i + 2\left(\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n+1} i + \sum_{i=1}^{n+2} i + \dots + \sum_{i=1}^{2n-2} i\right) =$$

$$= \frac{2n(2n-1)}{2} + 2\left[\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \dots + \frac{(2n-2)(2n-1)}{2}\right] =$$

$$= n(2n-1) + \sum_{k=n}^{2n-2} k(k+1) = n(2n-1) + \sum_{k=n}^{2n-2} k^2 + k =$$

$$= n(2n-1) + \sum_{k=1}^{2n-2} k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \sum_{k=1}^{2n-2} k - \sum_{k=1}^{n-1} k =$$

$$= n(2n-1) + \frac{(2n-2)(2n-1)(4n-3) - n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{(2n-2)(2n-1) - n(n-1)}{2} =$$

$$= n(2n-1) + \frac{(n-1)(2n-1)(7n-6)}{6} + \frac{(n-1)(3n-2)}{2} =$$

$$= n(2n-1) + \frac{(n-1)(14n^2-10n)}{6} = n(2n-1) + \frac{n(n-1)(7n-5)}{3} = \frac{7n^2-6n+2}{3}n$$

Si tratta dunque di risolvere l'equazione $\frac{7n^2-6n+2}{3}n = 55245$ cioè $7n^3 - 6n^2 + 2n - 3^2\cdot 5\cdot 29\cdot 127 = 0$ che ha come unica soluzione intera $n = 29$.

4. NATA DALLA TEMPESTA
Soluzione: la risposta è **2184**
I triangoli OA_iA_{i+1}, con $1 \le i \le 7$ e $A_8 = A_1$, devono essere colorati con uno dei 4 colori in modo che due triangoli adiacenti siano di colori diversi. Indichiamo con $c_{7,4}$ il numero di colorazioni ammissibili cioè che

rispettano tale vincolo. Il triangolo OA_1A_2 può essere colorato in 4 modi, mentre gli altri triangoli in 3 modi. Il triangolo OA_7A_1 potrebbe però essere dello stesso colore di OA_1A_2. In tal caso consideriamo l'unione dei due triangoli ottenendo il quadrilatero $OA_7A_1A_2$ colorato tutto dello stesso colore: in tal modo le 6 regioni in cui è diviso il poligono risultano colorate secondo la richiesta. Abbiamo quindi una corrispondenza biunivoca tra le colorazioni non ammissibili di 7 regioni e le colorazioni ammissibili di 6 regioni. Quindi $c_{7,4} = 4 \cdot 3^6 - c_{6,4}$. Inoltre $c_{3,4} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Pertanto:

$$c_{7,4} = 4 \cdot 3^6 - c_{6,4} = 4 \cdot 3^6 - 4 \cdot 3^5 + c_{5,4} = 4 \cdot 3^6 - 4 \cdot 3^5 + 4 \cdot 3^4 - c_{4,4} =$$
$$= 4 \cdot 3^6 - 4 \cdot 3^5 + 4 \cdot 3^4 - 4 \cdot 3^3 + c_{3,4} = 4 \cdot 3^6 - 4 \cdot 3^5 + 4 \cdot 3^4 - 4 \cdot 3^3 + 24 =$$
$$= 4 \cdot 3^3(3^3 - 3^2 + 3 - 1) + 24 = 4 \cdot 3^3 \cdot 20 + 24 = 2184$$

5. LE NOZZE ROSSE

Soluzione: la risposta è **1569**

Consideriamo le terne pitagoriche. Sappiamo che dovranno avere la forma $(u^2 - v^2, 2uv,\ u^2 + v^2)$, con u e v numeri interi e $u > v > 0$. I primi due numeri rappresentano i cateti e il terzo l'ipotenusa. Poiché l'ipotenusa è la somma di due quadrati e deve essere minore di 100, tutti i casi possibili si avranno prendendo $u = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ con v un numero tra 1 e $u - 1$, oppure $u = 8$ e $v = 1, 2, 3, 4, 5$, oppure $u = 9$ e $v = 1, 2, 3, 4$. Gli altri casi portano a ipotenuse maggiori o uguali a 100. Andiamo quindi a fare delle considerazioni. Dobbiamo sommare tutti questi $u^2 + v^2$ ovvero la somma di tutti i possibili u^2 con ripetizioni e di tutti i possibili v^2 con ripetizioni. Il termine u^2 si ripete una volta per $u = 2$, due volte per $u = 3$, ecc... fino a sei volte per $u = 7$, poi 5 volte per $u = 8$ e 4 volte per $u = 9$, mentre v^2 si ripete 8 volte per $v = 1$, 7 volte per $v = 2$, 6 volte per $v = 3$, 5 volte per $v = 4$, poi 3 volte per $v = 5$ e 1 volta per $v = 6$. Quindi dovremo fare questa somma:

$$(1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 + 4 \cdot 5^2 + 5 \cdot 6^2 + 6 \cdot 7^2 + 5 \cdot 8^2 + 4 \cdot 9^2) +$$
$$+(8 \cdot 1^2 + 7 \cdot 2^2 + 6 \cdot 3^2 + 5 \cdot 4^2 + 3 \cdot 5^2 + 1 \cdot 6^2) = 1569$$

6. LA BATTAGLIA DEI BASTARDI

Soluzione: la risposta è **2018**

Andiamo a scrivere la somma di questi numeri:

$$\sum_{n=1}^{2018} \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{2018} \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = \sum_{n=1}^{2018} \sqrt{n} - \sqrt{n-1} =$$
$$= \sqrt{1} - \sqrt{0} + \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{2018} - \sqrt{2017}$$

Possiamo notare che tutti i termini si annullano a due a due ad eccezione di $\sqrt{2018}$. Per cui la risposta è il quadrato di tale numero, ovvero 2018.

7. TYRION SCAPPA DA APPRODO DEL RE

Soluzione: la risposta è **0009**

Scriviamo il numero proposto da Tyrion:

123456789101112131415...........9989991000

Cominciamo a contare le cifre. Le prime 9 sono occupate dai numeri con 1 cifra. Le 180 cifre successive sono occupate dai numeri con 2 cifre (da 10 a 99). Da 100 a 199 abbiamo 300 cifre e così via per cui da 100 a 699 avremo 1800 cifre, che sommate alle 189 contate precedentemente fanno 1989. Mancano ancora 30 posizioni che corrispondono ai successivi 10 numeri di 3 cifre; per la precisione la 2019-esima cifra sarà la terza cifra del numero 709, pertanto la soluzione è 0009.

8. AGO

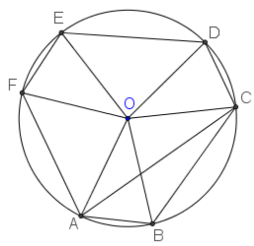
Soluzione: la risposta è **0056**

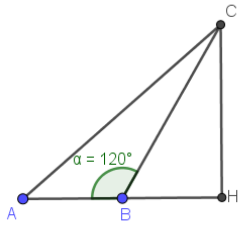
Se avvolgiamo un triangolo rettangolo attorno ad un cilindro qualsiasi, con la base del triangolo che si avvolge attorno alla base del cilindro, l'ipotenusa del triangolo descrive un'elica sul cilindro. Quindi dobbiamo pensare all'elica della lama come ipotenusa del triangolo rettangolo e srotolare il triangolo. In base alla condizione assegnata, il triangolo avrà angoli di 30° e 60° e quindi l'ipotenusa sarà il doppio dell'altezza.

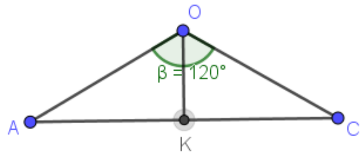
9. LA CORONA DORATA

Soluzione: la risposta è **4582**

L'esagono è l'unione di sei triangoli isosceli, tre con base di 3 pollici, tre con base di 6 pollici. Disponiamo i triangoli alternandoli. Sia $\overline{AB} = 3$ e $\overline{BC} = 6$.







Il quadrilatero OABC è un terzo di tutto l'esagono, quindi $\widehat{AOC} = 120°$.
Inoltre gli angoli interni di ABCDEF sono congruenti, pertanto $\widehat{ABC} = 120°$.
Condotta l'altezza CH relativa al lato AB, si ha $\overline{BH} = 3$ e $\overline{CH} = 3\sqrt{3}$ e dunque, applicando il teorema di Pitagora al triangolo AHC, si ottiene $\overline{AC} = \sqrt{36+27} = \sqrt{63}$.
Nel triangolo AOC, tracciata l'altezza OK relativa ad AC, si ha: $\overline{AO} = \frac{\overline{AC}}{\sqrt{3}}$ da cui $\overline{AO} = \sqrt{7}\cdot\sqrt{3} \approx 4{,}582$.

10. WINTER IS COMING
Soluzione: la risposta è **9216**
Il problema chiede di calcolare la somma delle cifre del numero $N = 9\cdot 99\cdot 9999\cdot \ldots \cdot \underbrace{99\ldots99}_{2^{10} cifre}$.

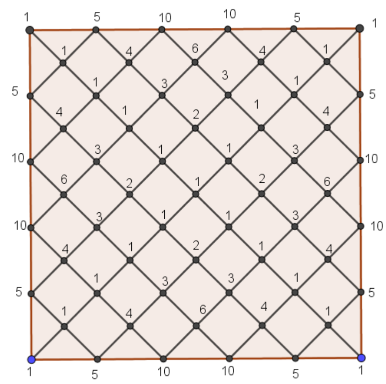
Posto $k = 9\cdot 99\cdot 9999\cdot \ldots \cdot \underbrace{99\ldots99}_{2^{9} cifre}$, si ha:

$$k < 10\cdot 10^2\cdot 10^4\cdot \ldots \cdot 10^{2^9} = 10^{1+2+2^2+\cdots+2^9} = 10^{\frac{2^{10}-1}{2-1}} = 10^{2^{10}-1} < 10^{2^{10}} - 1.$$

Siano $a_1, a_2, \ldots, a_l$ le cifre di k, con $a_l \neq 0$ e scriviamo k nella forma $k = \overline{a_1a_2\ldots a_l}$. Risulta:

$N = k\left(10^{2^{10}}-1\right) = 10^{2^{10}}k - k = \overline{a_1a_2\ldots a_{l-1}(a_l-1)\underbrace{99\ldots99}_{2^{10}-l}(9-a_1)\ldots(9-a_{l-1})(10-a_l)}$ e la somma delle cifre di tale numero è $9\cdot 2^{10} = 9216$.

11. I GIOCHI DI JOFFREY
Soluzione: la risposta è **6024**

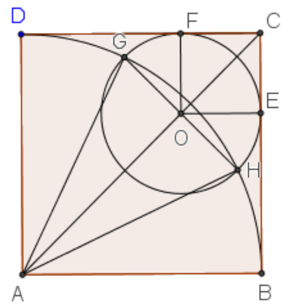


Partiamo da un vertice dell'ottaedro. Osserviamo innanzi tutto che per ogni vertice di partenza avremo il solito numero di percorsi, pertanto moltiplicheremo per 6 il risultato ottenuto da un vertice. La situazione è quella proposta dal disegno, partendo dal punto centrale si arriva agli spigoli delle facce con quel vertice in comune. Da ogni punto sul lato del quadrato avremo altrettanti percorsi per arrivare al vertice opposto, pertanto dovremo fare la somma di quei numeri al quadrato, ovvero:

$$4\cdot 1^2 + 8\cdot 5^2 + 8\cdot 10^2 = 4 + 200 + 800 = 1004$$

Moltiplichiamo tale numero per 6 e otteniamo il risultato di 6024.

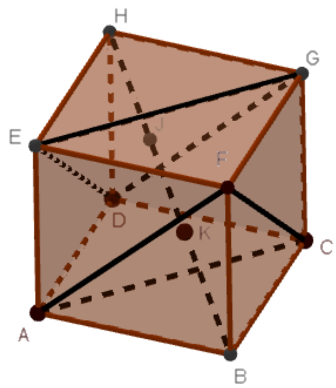
12. LA BATTAGLIA DELLE ACQUE NERE
Soluzione: la risposta è **0013**



In riferimento alla figura, sia $\overline{AB} = \overline{AG} = l$ e $\overline{FC} = \overline{FO} = x$ con $0 < x < l$. Risulta:
$\overline{OC} = x\sqrt{2}$, $\overline{AO} = l\sqrt{2} - x\sqrt{2}$ e $\overline{AG}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OG}^2$ da cui si ottiene l'equazione $l^2 = (l\sqrt{2} - x\sqrt{2})^2 + x^2$, cioè $3x^2 - 4lx + l^2 = 0$ che ha come unica soluzione accettabile $x = \frac{l}{3}$. Pertanto il rapporto richiesto è:

$$\frac{Area(cerchio)}{Area(quarto\ di\ cerchio)} = \frac{\pi\left(\frac{l}{3}\right)^2}{\frac{1}{4}\pi l^2} = \frac{4}{9}$$ da cui la risposta.

13. IL GRANDE TEMPIO DI BAELOR
Soluzione: la risposta è **1201**



Calcoliamo prima di tutto la distanza tra due diagonali non concorrenti di due facce adiacenti del cubo (AF e EG in figura) in funzione dello spigolo l del cubo. Poiché EG è parallela ad AC, EG è parallela al piano passante per A, C, F. Analogamente AF è parallela al piano per D, E, G. La distanza tra AF ed EG è la distanza tra tali piani. Osserviamo che tali piani sono perpendicolari alla diagonale BH del cubo perché B e H appartengono al luogo dei punti equidistanti dai vertici A, C, F e da D, E, G. Indicata con K l'intersezione tra

BH e il piano ACF, il volume della piramide ABCF è $V = \frac{1}{3} Area(ACF) \cdot \overline{BK}$, ma anche $V(ABCF) = \frac{1}{3} Area(ABC) \cdot \overline{BF}$. Uguagliando le due espressioni si ottiene $\overline{BK} = \frac{Area(ABC) \cdot \overline{BF}}{Area(ACF)} = \frac{\frac{l^3}{2}}{\frac{1}{2} l\sqrt{2} \cdot \frac{l}{2}\sqrt{6}} = l\frac{\sqrt{3}}{3}$. Analogamente $\overline{HJ} = l\frac{\sqrt{3}}{3}$ ed essendo anche $\overline{BH} = l\sqrt{3}$, si ha $\overline{JK} = l\frac{\sqrt{3}}{3}$ da cui $l = \overline{JK}\sqrt{3}$. Il volume del cilindro in funzione dello spigolo del cubo è $V(cilindro) = \pi l \left(\frac{l}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{\pi}{2} l^3$, mentre il volume della semisfera è

$V(semisfera) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi l \left(\frac{l}{2}\sqrt{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6} l^3 \sqrt{2}$, da cui, posto $\overline{JK} = d$, si ottiene che il volume del solido unione della semisfera e del cilindro è:

$V = \pi \frac{3\sqrt{3}}{2} d^3 + \frac{\pi}{6}\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3} d^3 = \frac{\pi}{2} d^3 \sqrt{3}(3 + \sqrt{2}) \approx 12{,}01 \cdot 10^9$ piedi^3

Quindi il numero dei barili necessari è $12{,}01 \cdot 10^2$ da cui la risposta.

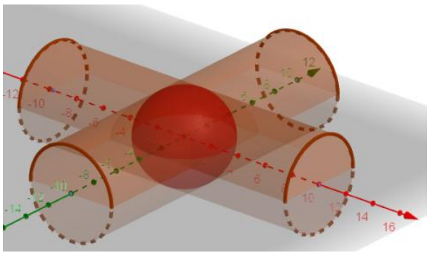
14. HODOR

Soluzione: la risposta è **2020**

Sostituiamo alla funzione $x = y = 0$ e otteniamo $f(0) = \frac{f(0)}{f(0)} + f(0) - f(0) = 1$ e poi sostituiamo $y = 0$ e otteniamo $f(x) = \frac{f(x)}{f(0)} + f(x) - f(0) = 2f(x) - f(0) = 2f(x) - 1$ per cui $f(x) = 1$. Quindi la funzione cercata è la funzione costantemente uguale a 1, pertanto la soluzione è la somma di 2020 volte 1.

15. CASTEL GRANITO

Soluzione: la risposta è **0072**



Indicato con R il raggio dei semicilindri, consideriamo la semisfera di raggio R e centro nel punto di intersezione degli assi (in figura sono rappresentati i cilindri e la sfera). La semisfera risulta inscritta nel solido intersezione. Sezionando il solido intersezione e la semisfera con piani paralleli al piano passante per gli assi dei due semicilindri, si ottengono rispettivamente un quadrato di area $4r^2$ ed un cerchio inscritto di area πr^2 con $0 \leq r \leq R$. Poiché tale rapporto è costante e uguale a $\frac{4}{\pi}$, allora il volume del solido intersezione si ottiene moltiplicando quello della semisfera per tale rapporto ed è pertanto uguale a $\frac{8}{3} R^3 = 72\ yarde^3$.

16. METALUPI, LEONI E DRAGHI

Soluzione: la risposta è **2809**

Il numero di modi di associare uno stemma alla casata sbagliata è dato dalle dismutazioni di 6 elementi ed è uguale a $6!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right)$ e quindi la probabilità che scegliendo a caso uno stemma non sia abbinato alla casata corretta è $\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right) = \frac{53}{144}$. Analogamente la probabilità che scegliendo a caso un motto non sia associato alla giusta casata è $\frac{53}{144}$. Pertanto la probabilità richiesta è $\left(\frac{53}{144}\right)^2 = \frac{2809}{20736}$.

17. LA DONNA ROSSA

Soluzione: la risposta è **0012**

Il solido che si vede nello specchio è un ottaedro di spigolo 3 pollici. Poiché il volume di un ottaedro in funzione dello spigolo l è $V = \frac{l^3\sqrt{2}}{3}$, si ha $V = \frac{27\sqrt{2}}{3} \approx 12$.

18. IL DRAGO E IL LUPO

Soluzione: la risposta è **9898**

Si tratta di risolvere il sistema di congruenze $\begin{cases} x \equiv 58\ mod\ 60 \\ x \equiv 21\ mod\ 83 \end{cases}$ e, poiché 60 e 83 sono coprimi, per il teorema cinese del resto il sistema ha un'unica soluzione modulo $60 \cdot 83 = 4980$. Dobbiamo risolvere il seguente sistema $\begin{cases} 83x \equiv 58\ mod\ 60 \\ 60x \equiv 21\ mod\ 83 \end{cases}$. Poiché 83 e 60 sono coprimi, la prima congruenza ammette un'unica soluzione modulo 60 e la seconda ha un'unica soluzione modulo 83. Per risolvere la prima congruenza dobbiamo

risolvere l'equazione diofantea $83x + 60y = 58$. Determiniamo prima di tutto una soluzione particolare dell'equazione $83x + 60y = 1$ mediante l'algoritmo di Euclide: essendo
$83 = 1 \cdot 60 + 23 \;\rightarrow\; 60 = 2 \cdot 23 + 14 \;\rightarrow\; 23 = 1 \cdot 14 + 9 \cdot \;\rightarrow\; 14 = 1 \cdot 9 + 5 \;\rightarrow\; 9 = 1 \cdot 5{+}4$
$\rightarrow\; 5 = 1 \cdot 4 + 1$, attraverso sostituzioni successive possiamo scrivere il massimo comun divisore di 83 e 60 nella forma $1 = 18 \cdot 60 - 13 \cdot 83$. Quindi la soluzione della prima congruenza è

$$x_1 = -13 \cdot 58\, mod\, 60 = -13(-2) mod\, 60 = 26\, mod\, 60$$

e quella della seconda è $x_2 = 18 \cdot 21\, mod\, 83 = 46\, mod\, 83$.
La soluzione del sistema è pertanto $\bar{x} = (83 \cdot 26 + 60 \cdot 46)\, mod\, 4980 = 4918\, mod\, 4980$.
Il numero richiesto è quindi uguale a 4918+4980=9898.

19. OLTRE LA BARRIERA
Soluzione: la risposta è **3038**
Siano α, β, γ gli zeri interi positivi del polinomio. Risulta $\alpha + \beta + \gamma = -a$, $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = b$ e $\alpha\beta\gamma = -c$, da cui

$$-(\alpha + \beta + \gamma) + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - \alpha\beta\gamma = -2019$$

Cambiando i segni e togliendo 1 da ambo i membri si ottiene:

$$\alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma + \alpha\beta\gamma - 1 = 2018$$

e scomponendo il polinomio al primo membro si ha

$$(\alpha - 1)(\beta - 1)(\gamma - 1) = 2 \cdot 1009$$

Si hanno pertanto le seguenti possibilità:

$$\begin{cases} \alpha - 1 = 1 \\ \beta - 1 = 2 \\ \gamma - 1 = 1009 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \alpha - 1 = 1 \\ \beta - 1 = 1 \\ \gamma - 1 = 2018 \end{cases}$$

Da cui si ottengono i valori

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 3 \\ \gamma = 1010 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 2019 \end{cases}$$

La somma richiesta è dunque $2 + 3 + 1010 + 2 + 2 + 2019 = 3038$.

20. LA BIBLIOTECA DELLA CITTADELLA
Soluzione: la risposta è **0288**
Osserviamo innanzi tutto che il numero di partenza è assolutamente arbitrario. Per comodità scegliamo di partire dal numero 100. Cerchiamo di capire quando ritornerà il raggio di luce sopra questo numero. I salti che fa il raggio corrispondono alla progressione dei numeri naturali, per cui il numero su cui casca nel giorno n corrisponderà alla somma dei primi n numeri naturali. Dobbiamo trovare quindi il più piccolo n per cui la somma dei primi n numeri naturali è un multiplo di 100:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 100k \;\rightarrow\; \frac{n(n+1)}{2} = 100k \;\rightarrow\; n^2 + n - 200k = 0$$

con k intero positivo.
Per avere soluzione intera positiva occorre che il delta sia un quadrato dispari (poiché nella risoluzione dell'equazione di secondo grado alla radice del delta andrà sottratto 1 e poi dovrà essere divisa per 2), ovvero:

$$1 + 800k = (2m + 1)^2 \;\rightarrow\; 1 + 800k = 4m^2 + 4m + 1 \;\rightarrow\; 200k = m^2 + m$$

per cui m dovrà essere pari ovvero:
$200k = 4l^2 + 2l \;\rightarrow\; 100k = 2l^2 + l$ e anche l dovrà essere pari e otteniamo:

$$100k = 2(2u)^2 + 2u \;\rightarrow\; 50k = 4u^2 + u \;\rightarrow\; 25k = 8v^2 + v$$

Sostituiamo i $v = 1,2,3,\ldots.$ fino a che non troviamo un multiplo di 25. Per $v = 1$ abbiamo 9, per $v = 2$ otteniamo 34, per $v = 3$ abbiamo 75 che è un multiplo di 25. Per cui il più piccolo k è 3. La soluzione positiva è $n = \frac{-1+\sqrt{2401}}{2} = \frac{-1+49}{2} = 24$
Moltiplichiamo tale numero per 12 cicli e otteniamo 288.