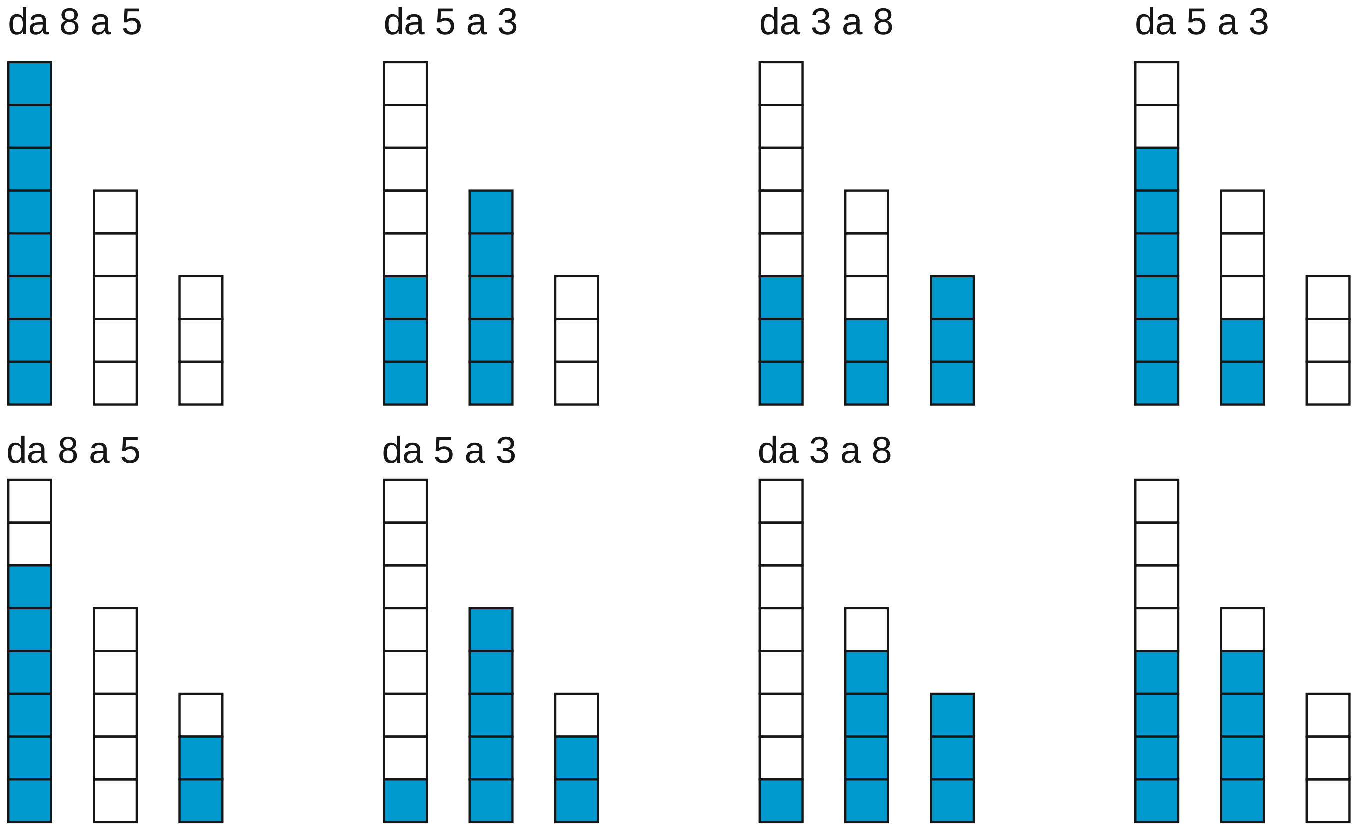
GARA DI MATEMATICA ON-LINE (1/12/2021)
Soluzioni

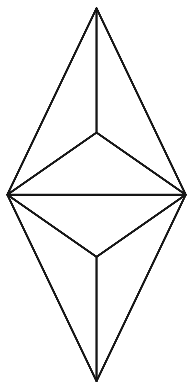
1. L'ASINO E IL MULO [12]
Traduciamo le frasi in equazioni: sia x il carico dell'asino e y il carico del mulo.
"Se io prendessi uno dei tuoi pacchi ne porterei il doppio di te" diventa $y+1=2(x-1)$, mentre "e io te ne dessi uno dei miei ne avremo in ugual numero" diventa $y-1=x+1$.
La seconda equazione possiamo anche scriverla $y=x+2$ e quindi la prima $x+3=2x-2$ da cui si ottiene $x=5$ e quindi $y=7$.

2. IL RISULTATO [16]
Indichiamo con x il numero comunicato da Andrea a Barbara e scriviamo il calcolo in forma algebrica: il numero da elevare al quadrato è $2(10x+7)$ cioè $20x+14$. Ora il resto della divisione per 5, qualunque sia x è sempre 4 visto che $20x$ è divisibile per 5 e 4 è il resto di $14:5$.
La risposta è $4^2=16$.

3. UN PROBLEMA TRA OSTI [7]



4. IL GIOCO [2]
Per vincere bisogna portare l'avversario sul "30" in modo che qualunque cosa aggiunga perda. Per fare ciò è necessario raggiungere "23", in modo che l'avversario non possa raggiungere il "30", che ci farebbe perdere. Continuando questo ragionamento si osserva che la strategia porta ad aggiungere sempre 7 in due mosse, rispondendo al numero sommato dall'avversario con il valore esattamente opposto del dado. Partendo quindi da "2" la vittoria è certa.



5. ROMBI SIMILI [300]
Tracciando la diagonale minore e unendo i vertici del rombo interno con quello esterno (lungo la diagonale maggiore) come in figura si ottengono sei triangoli congruenti. Il rombo più grande ha una superficie tripla di quello piccolo e cioè di $300\ \mathrm{cm}^2$.

6. UOVA AL MERCATO (1) [25]
Limitandoci alle prime tre richieste, osserviamo che se togliamo un uovo, il numero rimasto è un multiplo di 2, 3 e 4. Il numero di uova dovrà essere del tipo $12n+1$. Ora cerchiamo il più piccolo valore di n per cui $12n+1$ è multiplo di 5 per soddisfare anche l'ultima richiesta. Con $n=2$ si ha che $12n+1=25$.

7. UOVA AL MERCATO (2) [35]
Limitandoci alle prime tre richieste, osserviamo che se togliamo aggiungiamo un uovo, il numero ottenuto è un multiplo di 2, 3 e 4. Il numero di uova dovrà essere del tipo $12n-1$. Ora cerchiamo il più piccolo valore di n per cui $12n-1$ è multiplo di 5 per soddisfare anche l'ultima richiesta. Con $n=3$ si ha che $12n-1=35$.

8. NUMERI SPECIALI [9000]
Sia x un numero tra 1000 e 9999. Cerchiamo x in modo che $\left[x+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x}{2}\right)\right]\cdot\frac{4}{9}=x$.

Risolviamo ora l'equazione:

$$\left[x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\right]\cdot\frac{4}{9}=x$$

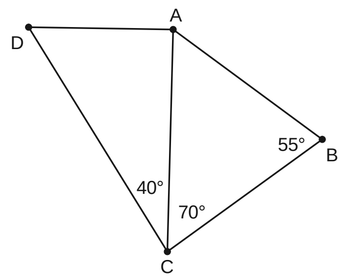
$$\frac{9}{4}x\cdot\frac{4}{9}=x$$

$$x=x.$$

L'equazione è indeterminata e quindi tutti i numeri tra 1000 e 9999 sono soluzione del problema.
Abbiamo 9000 soluzioni.

9. IN VIAGGIO VERSO IL MERCATO (1) [20]
Per minimizzare le spese di trasporto, conviene che l'ultimo viaggio sia di esattamente 30 misure e che abbia la distanza minima dal mercato.
Costruendo un deposito a 20 giorni di viaggio, con 3 viaggi si riesce ad accumulare esattamente 30 misure nel deposito, che, con un ultimo viaggio, permette di portare 20 misure di grano al mercato.
C'è anche la possibilità di realizzare un deposito a 10 giorni di viaggio per accumulare in tre viaggi le 60 misure di grano rimaste, dopo il pagamento del trasporto. Da questo deposito, con due viaggi del costo di 20 misure di grano ciascuno, si riesce a portare 10+10 misure di grano al mercato.
La risposta richiesta è 20.

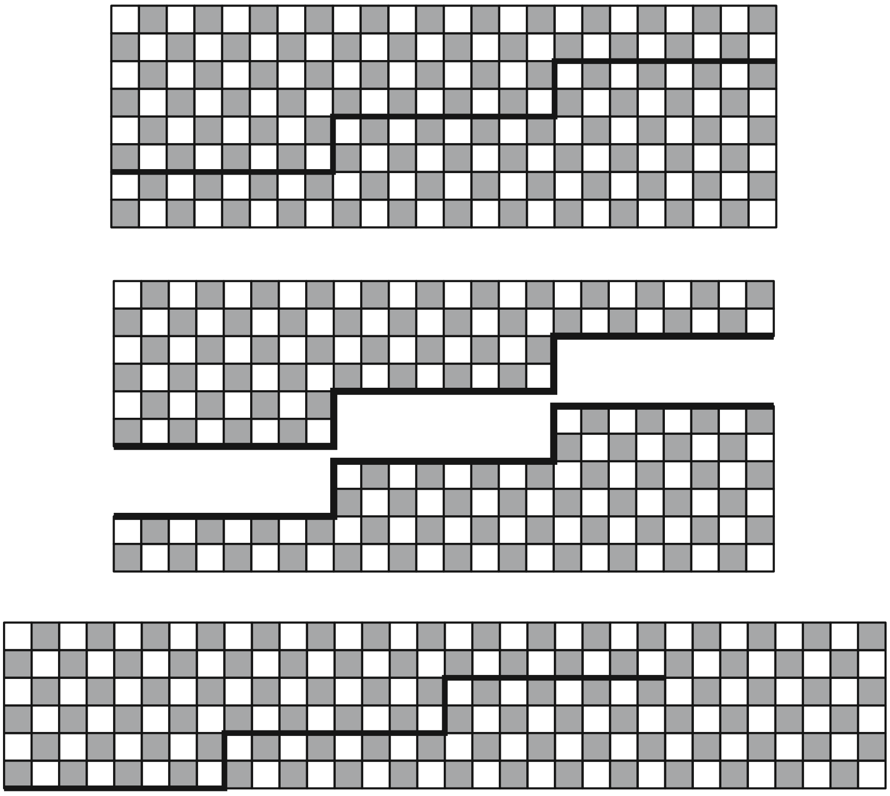
10. TRIANGOLI [100]
Il triangolo ABC è isoscele, in quanto $C\hat{A}B=180°-70°-55°=55°=A\hat{B}C$. Anche il triangolo DAC è isoscele, in quanto $AC=CB=DA$. L'angolo $C\hat{D}A=D\hat{C}A=40°$ e di conseguenza $C\hat{A}D=180°-40°-40°=100°$.



11. UNA SOMMA IMPOSSIBILE [2]
La cifra delle unità di tutte le potenze è sempre 1, ed essendoci 2022 addendi, la cifra delle unità della somma è 2.

12 PALLA GROSSA (1) [150]
Avendo scommesso in tutto 240 ducati ed avendo disputato 16 partite, al vincitore spettano x ducati secondo la proporzione $x:10=240:16$ e cioè $x=\frac{240\cdot 10}{16}=150$ ducati.

13. IL PEZZO DI STOFFA [28]



Il taglio è lungo 28 m.

14 MARITI GELOSI [11]
Indichiamo con le lettere maiuscole i mariti e le minuscole le relative mogli. Riportiamo in tabella una possibile soluzione.

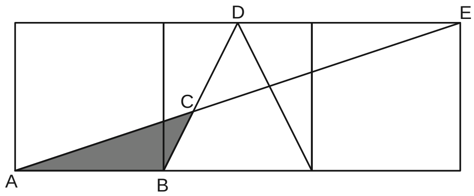
SPONDA SINISTRA	BARCA	SPONDA DESTRA
Aa Bb Cc		
	Aa -->	
Bb Cc		Aa
	<-- A	
A Bb Cc		a
	bc -->	
A B C		a b c
	<-- a	
Aa B C		b c
	BC -->	
Aa		Bb Cc
	<-- B b	
Aa Bb		C c
	A B -->	
		A B Cc
	<-- c	
a b c		
	a b -->	
C		Aa Bb C
	<-- C	
C c		
	C c -->	
		Aa Bb Cc

Sono state necessarie 11 traversate.

15. QUADRATI MAGICI [65]

Per rispondere al proble a non è necessario costruire il quadrato magico, ma osservare che la somma di tutte le righe equivale alla somma di tutti i numeri del quadrato. La costante magica di un quadrato 5×5 è $\frac{1+2+3+...+25}{5}=\frac{25\cdot26}{2}\cdot\frac{1}{5}=5\cdot13=65$.

16. L'AREA MISTERIOSA [500]



I triangoli ABC e DCE sono simili, con rapporto di similitudine $\frac{2}{3}$.

Infatti la base AB misura 50 cm mentre la base DE ne misura 75 cm. La somma delle altezza dei due triangoli è 50, quindi il triangolo ABC deve avere altezza pari a 20 cm.

L'area di ABC è $\frac{50\cdot20}{2}=500\text{ cm}^2$

17. MONETE [21]

Una moneta da 2 ed una da 5 dobbiamo necessariamente usarle. Restano 200 che possono essere ottenuti con 40 monete da 5, oppure con 38 monete da 5 e le restanti da 2, oppure on 36 monete da 5 e le restanti da 2 e via di seguito, per un totale di 21 modi diversi (da 40 a 0 monete da 5 ma sempre in numero pari).

18. LA CONTA [0607]

Luca e Claudia prenderanno i due "ultimi" posti della conta.

Ci basta mettere i 32 numeri in cerchio e procedere alla conta, eliminando di volta in volta il nono numero della sequenza. Dopo aver eliminato 30 numeri restano il "6" e il "7" che saranno i posti occupati da Luca e Claudia. La risposta richiesta è 0607

19. IN VIAGGIO VERSO IL MERCATO (2) [25]

Il ragionamento fatto al problema 9 resta valido. Conviene avere un deposito il più vicino possibile al mercato in cui cercare di accumulare 30 misure di grano.

Con una solo deposito si ottiene la soluzione del problema 9.

Proviamo con 2 depositi. Con uno a distanza 10, trasporto le 90 misure di grano in 3 viaggi al costo di 30 misure. Le 60 misure rimaste, con due viaggi posso portarle a distanza 25 al costo di 30 misure di grano. Mi resta da percorrere una distanza di 5 che mi permette di portare 25 misure di grano al mercato.

Non si può fare meglio. La risposta è 25

20 PALLA GROSSA 2 [210]

Eseguire una proporzione, come nel problema 12 non è corretto, in quanto ad uno dei due monaci basterebbe una sola vittoria per aggiudicarsi la gara.

In questo problema dobbiamo calcolare la probabilità di vittoria di ciascuno e dividere la posto in proporzione alle probabilità.

Il secondo monaco, per vincere deve necessariamente aggiudicarsi tre match in successione, cosa che può fare con probabilità $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$. L'altro monaco ha probabilità $\frac{7}{8}$ di vincere la gara.

Al monaco in vantaggio spettano quindi $\frac{7}{8}\cdot240=210$ ducati.