GARA DI MATEMATICA ON-LINE (23/11/2020)

1. ALGEBRA 1 [25]

Riscriviamo l'equazione:

$\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=28$ che possiamo ulteriormente scrivere

$\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=28$ sfruttando i prodotti notevoli.

Detto $t=x+\frac{1}{x}$ abbiamo che $t^3+t^2-2t-30=0$ la cui unica soluzione reale è $t=3$.

$x+\frac{1}{x}=3$ porta a trovare le soluzioni $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$(2x-3)^4=\left(2\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}-3\right)^4=\left(\pm\sqrt{5}\right)^4=25$.

2. ALGEBRA 2 [0]

Osserviamo che se sia $p(x)$ che $q(x)$ hanno una radice in comune, allora anche $h(x)=p(x)-q(x)$ ha la stessa radice. Se eseguiamo la differenza tra i due polinomi assegnati otteniamo:

$(a-b)x^3+(b-a)x=0$ e cioè, visto che $a\neq b$, dividendo per $(a-b)$

$x^3-x=0$ che ha $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm1$.

Siccome x_1 non è soluzione di nessuno dei due polinomi, le due soluzioni comuni sono $x_{2,3}=\pm1$.

Per il teorema del resto, applicato al primo polinomio, devono valere contemporaneamente le relazioni: $a+b=-4$ e $a+b=4$, il che è impossibile.

In conclusione non esiste alcuna coppia $(a;b)$, $a\neq b$ che verifica la richiesta del problema.

3. FUNZIONI [2019]

$f\left(\frac{1}{1-x}\right)=x\cdot f(x)+2020$ **(1)**

Sostituiamo x con $\frac{1}{1-x}$. Eseguendo i calcoli si ottiene

$f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{1}{1-x}\cdot f\left(\frac{1}{1-x}\right)+2020$ **(2)**

Sempre nell'equazione funzionale iniziale sostituiamo x con $\frac{x-1}{x}$, si ottiene

$f(x)=\frac{x-1}{x}\cdot f\left(\frac{x-1}{x}\right)+2020$.

Sostituiamo a cascata le equazioni (2) e (1):

$f(x)=\frac{x-1}{x}\cdot\left(\frac{1}{1-x}\cdot f\left(\frac{1}{1-x}\right)+2020\right)+2020$

$f(x)=-\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{1-x}\right)\cdot+\frac{x-1}{x}\cdot2020+2020$

$f(x)=-\frac{1}{x}\left(x\cdot f(x)+2020\right)\cdot+\frac{x-1}{x}\cdot2020+2020$

$f(x)=-f(x)-\frac{2020}{x}+\frac{x-1}{x}\cdot2020+2020$. Isolando e risolvendo in $f(x)$ si ottiene:

$f(x)=\frac{2020(x-1)}{x}$.

$f(2020)=\frac{\cancel{2020}\cdot2019}{\cancel{2020}}=2019$.

4. FILE DI ZERI [10]

Sia $x=10^{10}+\varepsilon$ la radice cercata.

Per quanto definito, possiamo scrivere: $x^2=\left(10^{10}+\varepsilon\right)^2=100^{10}+2\cdot10^{10}\cdot\varepsilon+\varepsilon^2=100^{10}+1$

Siccome $0<\varepsilon<1$ dall'ultima uguaglianza sopra riportata, togliendo ε^2 possiamo ottenere che $2\cdot10^{10}\cdot\varepsilon<+1$ e cioè $\varepsilon<\dfrac{1}{2\cdot10^{10}}$.

D'altra parte $2\cdot10^{10}\cdot\varepsilon+\varepsilon>1$ (se $0<\varepsilon<1$, $\varepsilon^2<\varepsilon$), cioè $1<(2\cdot10^{10}+1)\cdot\varepsilon<(2\cdot10^{10}+10^{10})\cdot\varepsilon=3\cdot10^{10}\varepsilon$.

Isolando ε otteniamo $\varepsilon>\dfrac{1}{3\cdot10^{10}}$

Abbiamo ottenuto che $\dfrac{1}{3\cdot10^{10}}<\varepsilon<\dfrac{1}{2\cdot10^{10}}$ cioè $\dfrac{1}{3}\cdot10^{-10}<\varepsilon<\dfrac{1}{2}\cdot10^{-10}$ che ci dice che ε ha una scrittura decimale con 10 zeri prima della prima cifra significativa.

$n=10$.

5. ALGEBRA 3 [6]

Eseguendo la divisione tra $P(x)$ e $Q(x)$ si ottiene $P(x)=Q(x)\cdot(x^2+1)+x^2-x+1$.

$P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=a^2-a+1+b^2-b+1+c^2-c+1+d^2-d+1=(a^2+b^2+c^2+d^2)-(a+b+c+d)+4$.

Sfruttando i prodotti notevoli, possiamo scrivere che la somma cercata è anche uguale a

$=(a+b+c+d)^2-2(ab+ac+ad+...)-(a+b+c+d)+4$.

Conoscendo le relazioni tra coefficienti e radici si osserva che $(a+b+c+d)=1$ e $(ab+ac+ad+...)=-1$.

La somma cercata diventa $=1-2\cdot(-1)-1+4=6$.

6. QUADRATO MAGICO [2208]

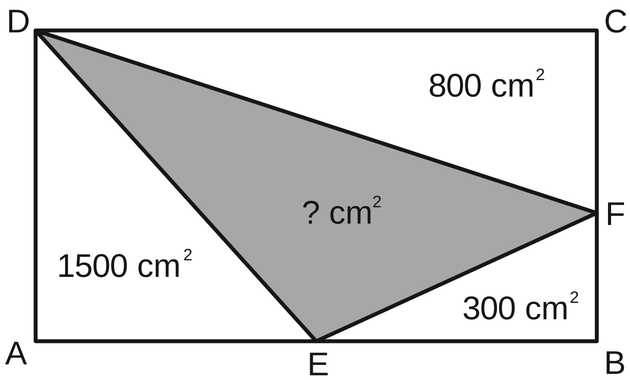
d	c	811
	b	
661	670	a

Sia k la costante magica del quadrato.

Riferendoci alle posizioni indicate in figura si può scrivere: $a=k-1331$ (guardando l'ultima riga), $b=k-1472$ (guardando la diagonale dal basso a sinistra) $c=802$ (calcolando la colonna centrale) e $d=k-1613$ (risolvendo la prima riga).

A questo punto la diagonale che parte dall'alto a sinistra diventa: $k-1613+k-1472+k-1331=k$ equazione che risolta porta a determinare $k=2208$.

7. UN RETTANGOLO A PEZZI [1400]



Siano $a=AD$ e $b=AB$ le dimensioni del rettangolo.

Abbiamo che $AE=\dfrac{3000}{a}$, $EB=b-AE=b-\dfrac{3000}{a}$,

$CF=\dfrac{1600}{b}$ e $BF=a-CF=a-\dfrac{1600}{b}$.

Con queste informazioni l'area del triangolo EBF può essere scritta:

$300=\dfrac{1}{2}\left(b-\dfrac{3000}{a}\right)\left(a-\dfrac{1600}{b}\right)$, cioè

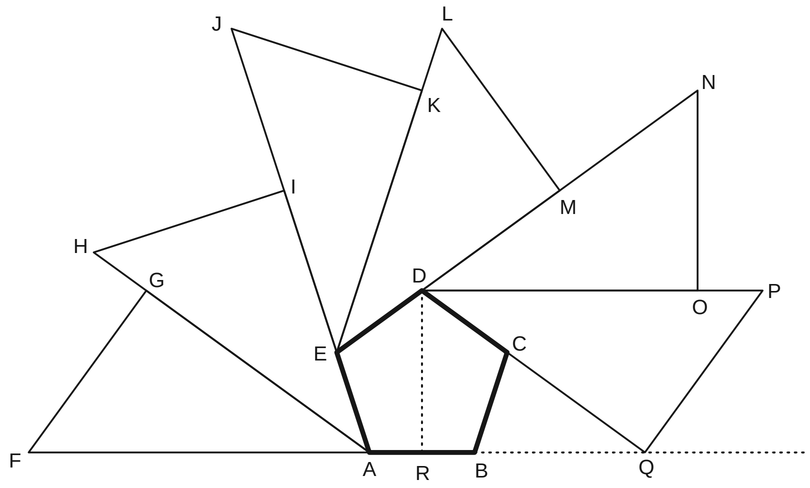
$600=ab-3000-1600+\dfrac{3000\cdot1600}{ab}$ che può essere scritta sotto forma di equazione di secondo grado nell'incognita ab:

$ab^2-5200ab+4.800.000=0$

Le due soluzioni sono $ab=1200$ (non accettabile) e $ab=4000$.

L'area cercata è $4000-1500-300-800=1400\ \text{cm}^2$.

8. ATTORNO AD UN PENTAGONO REGOLARE [323]



L'angolo interno del pentagono misura $108°$ e quindi il triangolo CQB risulta avere gli angoli di $72°$, $72°$ e $36°$. È un triangolo aureo e quindi $CQ = BQ = 100\varphi$ dove φ è la sezione aurea che vale $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Tracciamo la perpendicolare DR e osserviamo che i triangoli DRQ e DQP sono simili.

In particolare: $DP : DQ = DQ : RQ$.

$$DP = \frac{DQ^2}{RQ} = \frac{(100+100\varphi)^2}{50+100\varphi} = \frac{100^2(1+\varphi)^2}{50(1+2\varphi)} = \frac{200\cdot(1+2\varphi+\varphi^2)}{1+2\varphi} = \frac{200\cdot(1+2\varphi+\varphi+1)}{1+2\varphi} = \frac{200\cdot(3\varphi+2)}{1+2\varphi}$$

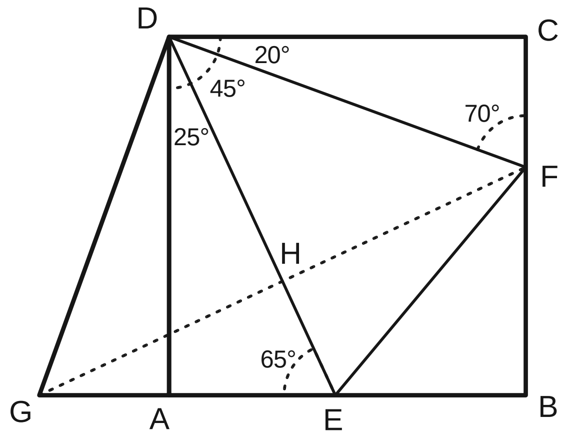
Dove nell'ultima uguaglianza si è sfruttata la proprietà della sezione aurea $\varphi^2 = \varphi + 1$.

A questo punto inseriamo il valore noto di φ e otteniamo:

$$DP = \frac{200\cdot\left(3\frac{\sqrt{5}+1}{2}+2\right)}{1+\cancel{2}\frac{\sqrt{5}+1}{\cancel{2}}} = \frac{100(3\sqrt{5}+7)}{\sqrt{5}+2}\cdot\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2} = 100(1+\sqrt{5}) \cong 323,61 \text{ cm}.$$

9. UN QUADRATO A PEZZI [200]

Dopo aver calcolato gli angoli in cui rimane diviso l'angolo $A\hat{D}C$, costruiamo sul lato AD un triangolo rettangolo ADG congruente al triangolo DCF (vedi figura a lato). Uniamo G con F e sia H il punto di intersezione tra GF e DE.



Il triangolo rettangolo GDF risulta essere isoscele, quindi $D\hat{G}H = D\hat{F}H = 45°$. Anche l'angolo $G\hat{D}H = 45°$ e quindi DH è l'altezza del triangolo GDF.

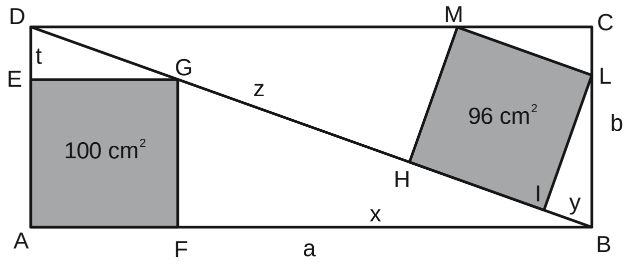
Il triangolo GFE risulta isoscele: $EG = EF$

Sia $CF = x$ e $AE = y$.

Per costruzione $AG = CF = x$ e per quanto appena dimostrato $EF = x + y$.

$EB + BF + EF = 100 - y + 100 - x + x + y = 200 \text{ cm}$.

10. DENTRO AD UN RETTANGOLO [600]



Riferendoci alla figura a fianco riportata, siano a e b le dimensioni del rettangolo ($a > b$), $BF = x$, $BI = y$, $DH = z$ e $DE = t$.
Per come sono costruiti, tutti i triangoli rettangoli della figura sono simili tra loro. Sia $k = \dfrac{a}{b}$ il rapporto tra le dimensioni dei due cateti. Per quanto osservato, possiamo scrivere:

$x = 10k$, $t = \dfrac{10}{k}$, $y = \dfrac{\sqrt{96}}{k}$ e $z = \sqrt{96}k$.

Per il Teorema di Pitagora, applicato al triangolo ABD si ha:

$(10+10k)^2 + \left(10 + \dfrac{10}{k}\right)^2 = \left(\sqrt{96}k + \sqrt{96} + \dfrac{\sqrt{96}}{k}\right)^2$ che possiamo anche scrivere:

$$100\left(1+2k+k^2+1+\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}\right) = 96\left(k+1+\frac{1}{k}\right)^2$$

$25\left(1+2k+k^2+1+\dfrac{2}{k}+\dfrac{1}{k^2}\right) = 24\left(k^2+1+\dfrac{1}{k^2}+2k+2+\dfrac{2}{k}\right)$ che semplificata diventa

$k^2 + \dfrac{1}{k^2} + 2\left(k+\dfrac{1}{k}\right) - 22 = 0$. Detto $t = k + \dfrac{1}{k}$ l'equazione diventa

$t^2 - 2 + 2t - 22 = 0$

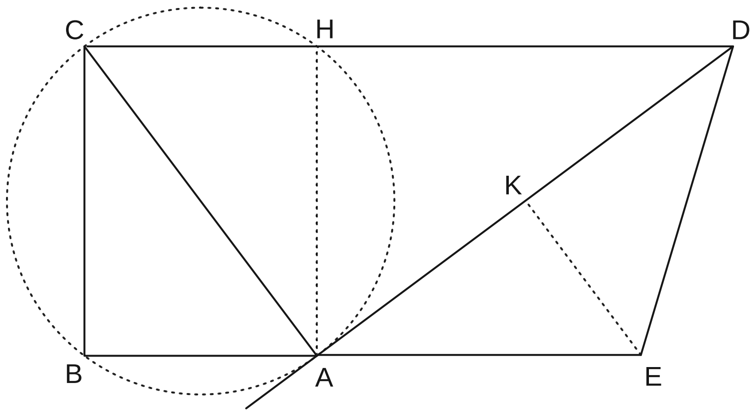
$t^2 + 2t - 24 = 0$ che ha come unica soluzione accettabile $t = 4$.

$k + \dfrac{1}{k} = 4$ diventa $k^2 - 4k + 1 = 0$.

Delle due soluzioni $k = 2 \pm \sqrt{3}$ possiamo accettare solo quella con il segno $+$ per la condizione $a > b$.
Calcoliamo la misura del lato maggiore a del rettangolo: $a = 10 + 10k = 10(1+2+\sqrt{3}) = 10(3+\sqrt{3})$.
Infine, l'area cercata:

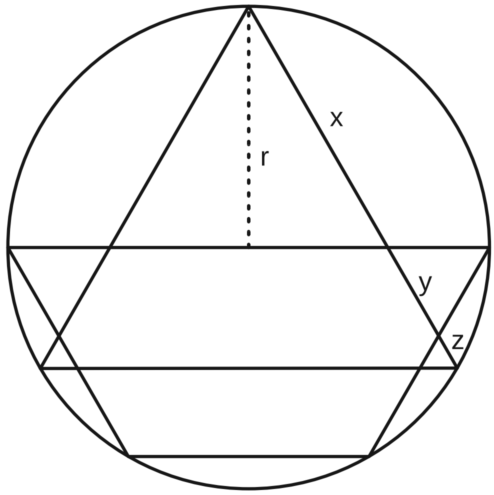
$$A = ab = \frac{a^2}{k} = \frac{10^2(3+\sqrt{3})^2}{2+\sqrt{3}} = \frac{100(9+3+6\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}} = \frac{100(12+6\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}} = \frac{600(\cancel{2+\sqrt{3}})}{\cancel{2+\sqrt{3}}} = 600\ \text{cm}^2$$

11. GEOMETRIA A PAROLE [142]



Tracciando il segmento AH perpendicolare a CD Si ottiene un triangolo congruente ad ABC (infatti H appartiene alla circonferenza).
Si osserva che: $A\hat{C}B = C\hat{A}H = H\hat{D}A = A\hat{D}E = D\hat{A}E$ e quindi che $AE = DE$. I triangoli rettangoli sono tutti simili tra loro.
A questo punto, sfruttando il teorema di Pitagora (o la terna pitagorica $(3;4;5)$) si ottengono facilmente: $BC = 24$ cm, $HD = 32$ cm. Tracciando l'altezza EK e continuando ad usare la terna pitagorica $(3;4;5)$ si ha $AE = 25$ cm.
Il perimetro cercato è $2p_{BEDC} = 50 + 25 + 43 + 24 = 142$ cm.

12. AREA COMUNE [7009]



Sia l il lato del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza e siano x, y e z la parti in cui viene diviso il lato del triangolo dal trapezio (vedi figura a alato).

Esprimiamo tutte le incognite in funzione del raggio della circonferenza:

$l = r\sqrt{3}$; Siccome $r = \frac{x}{2}\sqrt{3}$, $x = \frac{2}{\sqrt{3}}r$.

Osservando metà della base maggiore del trapezio, si può scrivere che $x + y = r$ e quindi $y = r - \frac{x}{2} = r - \frac{1}{\sqrt{3}}r = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}r$.

Visto che $l = x + y + z$,

$z = l - x - y = r\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}r - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}r = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}r$.

$A_{parte\_comune} = A_{T(l)} - 2 \cdot A_{T(z)} - A_{T(x)}$ (dove con $A_{T(x)}$ abbiamo indicato l'area del triangolo equilatero di lato x che sappiamo valere $A_{T(x)} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$).

$$A_{parte\_comune} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(l^2 - 2z^2 - x^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(3r^2 - 2\left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^2 r^2 - \frac{4}{3}r^2\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}r^2\left(3 - \frac{2}{3}\left(4 + 3 - 4\sqrt{3}\right) - \frac{4}{3}\right) = \frac{8-3\sqrt{3}}{4}r^2 \cong 70,09 \text{ cm}^2 \cong 7009 \text{ mm}^2 .$$

13. QUESTIONE DI BASE [1230]

Sia x la base (9, 10 o 11) la richiesta è equivalente a chiedere che x divida il polinomio $ax^3 + bx^2 + cx + d$, cosa che accadde solo se $d = 0$.

Una volta fissato $d = 0$ le altre tre cifre possono essere qualsiasi.

Il numero più piccolo è quindi 1230

14. SOMME DI FRAZIONI [180]

Riscriviamo la condizione richiesta:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} = \frac{2}{5}$$

$5a + 5b + 5 = 2ab$, isolando una variabile:

$$b = \frac{5a+5}{2a-5}$$

Cerchiamo di riscrivere l'uguaglianza in modo da avere la variabile a solamente a denominatore.

$$b = \frac{1}{2} \cdot \frac{10a+10}{2a-5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10a - 25 + 25 + 10}{2a-5} = \frac{1}{2} \cdot \left(5 + \frac{35}{2a-5}\right).$$

Affinché b sia naturale, dovrà essere $\frac{35}{2a-5}$ un numero intero dispari.

$2a - 5$ è un divisore di 35 e quindi abbiamo le seguenti possibilità:

$2a - 5 = 1$ $\quad a = 3$ e $b = 20$
$2a - 5 = 5$ $\quad a = 5$ e $b = 6$
$2a - 5 = 7$ $\quad a = 6$ e $b = 5$
$2a - 5 = 35$ $\quad a = 20$ e $b = 3$
$2a - 5 = -1$ $\quad a = 2$ ma $b < 0$
$2a - 5 = -5$ $\quad a = 0$ non accettabile.
$2a - 5 = -7$ $\quad a < 0$
$2a - 5 = -35$ $\quad a < 0$.

La soluzione richiesta è $(3 \cdot 20 + 5 \cdot 6) \cdot 2 = 180$.

15. SOLO UN CONTO… [6001]

In generale sia il numero sotto radice formato da $k+1$ cifre "4", k cifre "8" ed una cifra "9".

Per $k=0$ abbiamo $49=7^2$, per $k=1$ abbiamo $4489=67^2$, per $k=2$ abbiamo $444889=667^2$.

Si può verificare che in generale $\left(\underbrace{666...6}_{k+1}+1\right)^2$ genera tutti i numeri del tipo $\underbrace{44...4}_{k+1}\underbrace{88...8}_{k}9$.

Nel nostro caso il risultato è $n=\underbrace{666...6}_{1000}+1$ la cui somma delle cifre vale $1000\cdot 6+1=6001$

16. PER UNA CIFRA… [585]

Siccome $435=3\cdot 5\cdot 29$ e $845=5\cdot 13^2$, il candidato per il cambio della cifra è il primo fattore.

Nel prodotto dei fattori primi sicuramente 5^2 e 13^2 dovranno comparire. Ci manca un k^2 che deve nascere dalla fattorizzazione del primo fattore una volta cambiata una cifra.

Cerchiamo, quindi, un numero k, tale che $5k^2=\overline{a35}$ o $5k^2=\overline{4b5}$.

Dopo qualche tentativo ($5\le k\le 14$) si scopre che solo $k=9$ verifica la condizione cercata in quanto $5\cdot 9^2=405$. $405\cdot 845=5^2\cdot 9^2\cdot 13^2$ e quindi $n=5\cdot 9\cdot 13=585$.

17. MALEDETTI FURFANTI [16]

Ogni volta che un commensale parla, accusa l'altro di essere di tipo diverso da lui. Infatti un cavaliere sostiene, a ragione, che l'altro è un furfante, ed un furfante, mentendo, che l'altro è un furfante e quindi lo riconosce come cavaliere.

Identifichiamo se vi sono catene di accuse reciproche:

1-->2-->4-->8-->16=1 (1-2-4-8);

3-->6-->12-->24=9-->18=3 (3-6-12-9);

5-->10-->20=5 (5-10);

7-->14-->28=13-->26=11-->22=7 (7-14-13-11);

Una volta identificato il primo della catena, gli altri sono obbligati.

Vi sono quindi $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=16$ possibilità.

18. SUDOKU A STRISCE [4032]

Riportiamo, a lato, lo schema risolto. Indicativamente si procede inserendo prima tutti i 6, quindi tutti i 3. A questo punto si riescono a mettere quasi tutti i 4 e tutti i 5. Completare lo schema diventa semplice.

La soluzione richiesta è $1\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 7\cdot 2=4032$.

1	5	7	8	9	2	6	4	3
9	8	4	7	6	3	2	1	5
3	2	6	5	1	4	9	7	8
8	4	2	6	3	5	1	9	7
7	6	3	1	2	9	5	8	4
5	9	1	4	7	8	3	2	6
4	1	8	2	5	6	7	3	9
2	3	5	9	4	7	8	6	1
6	7	9	3	8	1	4	5	2

19. CALCOLO ENIGMATICO [7031]

Dalla prima colonna si osserva subito che $D=0$.

Dalla terza colonna che $A=F+1$ e dalla terza riga che $B=I+F=I+A+1$.

Dalla seconda riga, sapendo che $D=0$ si ottiene che una delle cifre tra G e H deve essere 5.

Con queste informazioni, si può determinare l'unica soluzione possibile che è quella riportata a fianco.

La risposta richiesta $CDEF=7031$.

29	·	7	=	203
+		−		−
150	:	6	=	25
179	−	1	=	178

20. THE GAME [8]

Claudia non può prendere un numero dispari di monete. Infatti se lo facesse, Luca prenderebbe una sola moneta lasciando Claudia con un numero pari di monete e con la possibilità di prenderne solo una alla volta, vincendo il gioco.

Se Claudia ne prende 2, ne lascia 1990. Luca sa che non deve prendere 1, perché perderebbe e quindi ne prende 2. Claudia ragionerà allo stesso modo. Continuando di questo passo, siccome $1990:2=995$ sarà Luca a trovarsi con 2 monete vincendo il gioco.

Se Claudia ne prende 4, ne lascia 1988. Come per il caso precedente $1988:4=497$ e quindi sarà sempre Luca, ripetendo le stesse mosse di Claudia ad avere il vantaggio alla fine.

Se Claudia ne prende 6, ne lascia 1986. Ancora una volta $1986:6=331$ e ancora Luca, ripetendo le stesse mosse di Claudia ad avere il vantaggio alla fine.

Con una prima mossa di 8, Claudia lascia 1984. In questo caso $1984:8=248$ e quindi qualunque mossa farà Luca, Claudia, ripetendola si troverà a vincere il gioco.