GARA DI MATEMATICA ON-LINE (21/12/2020)

1. ROGER E BABY HERMAN [109]

Trascuriamo per il momento il numero 1000.

Tra 0 (scritto 000) e 999 vengono utilizzate $3\cdot 1000=3000$ cifre equamente distribuite.

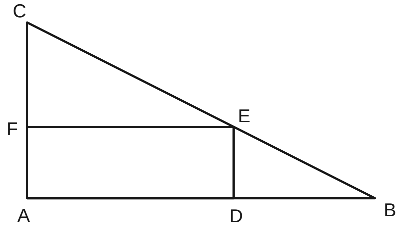
Abbiamo quindi un numero di cifre dispari $D=\dfrac{3000}{2}=1500$ ed un numero di cifre pari, $P=\dfrac{3000}{2}-3-2\cdot 9-1\cdot 90=1389$.

I valori calcolati vanno aggiornati tenendo conto del numero 1000:

$D=1500+1=1501$, $P=1389+3=1392$.

La loro differenza vale: $D-P=1501-1392=109$.

2. INVESTIGATORE PRIVATO [984]



Osserviamo che $CF:EF=ED:DB$ e che

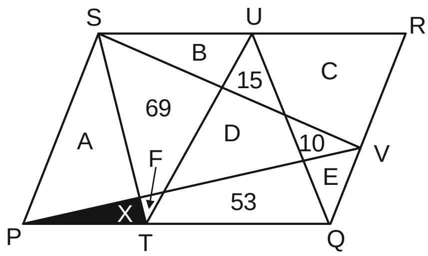
$A_{ADEF}=EF\cdot ED=CF\cdot DB=41\cdot 24=984\ \text{cm}^2$.

3. LA RED CAR [1023]

Per il calcolo del numero di fattori p di $n!$ è sufficiente dividere n per p. Prendere il quoziente e dividerlo ancora per p continuando a dividere i quozienti fino a che sono maggiori di 0. A questo punto basta sommare tutti i quozienti fin qui trovati.

Nel nostro caso dividere 2^{10} per 2 e poi procedere come sopra, equivale a trovare la somma $2^9+2^8+...+2+1=2^{10}-1=1023$.

4. IL LOCALE NOTTURNO [11]



Indicate con A, B, C, D, E, F e X le aree incognite, si osserva che l'area del parallelogramma $PQRS$ è il doppio delle aree di $A_{PST}+A_{TUQ}$ e di $A_{SUT}+A_{UQR}$ ed anche di A_{SPV} e di $A_{RSV}+A_{VPQ}$ e quindi:

$A+69+D+10=B+15+C+X+F+53+E$ e che

$A+X+15+D+53=B+69+F+C+10+E$

Sottraendo tra loro le due relazioni appena scritte si ottiene:

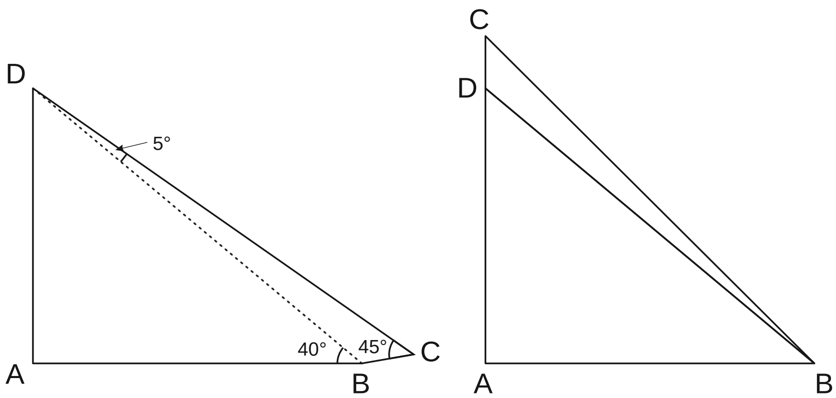
$A+69+D+10-(A+X+15+D+53)=B+15+C+X+F+53+E-(B+69+F+C+10+E)$

$11-X=X-11$, cioè

$2X=22$

$X=11$.

5. LO SCHERZO DI ACME [648]



L'angolo $D\hat{B}C$ misura $180°-45°-5°=130°$ e l'angolo $A\hat{D}B=180°-90°-40°=50°$.

Prendendo il triangolo BDC e riposizionandolo come nella figura di destra si ottiene un triangolo rettangolo isoscele la cui area è $A=\dfrac{36^2}{2}=648\ \text{cm}^2$.

6. JESSICA RABBIT [5040]

Osserviamo che $a^b = 1$ se $b = 0$, oppure se $a = 1$, oppure se $a = -1$ ma con esponente naturale e pari.

1) $b = 0$

$x^2 - 13x + 42 = 0$ ha come soluzioni $x_1 = 7$ e $x_2 = 6$.

2) $a = 1$

$x^2 - 7x + 11 = 1$, cioè $x^2 - 7x + 10 = 0$ ha come soluzioni $x_3 = 5$ e $x_4 = 2$.

3) $a = -1$, con controllo dell'esponente b

$x^2 - 7x + 11 = -1$, cioè $x^2 - 7x + 12 = 0$ ha come soluzioni $x_5 = 3$ (che ha $b = 12$) e $x_6 = 4$ (che ha $b = 6$).

La soluzione richiesta è $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5040$.

7. FARFALLINA [47]

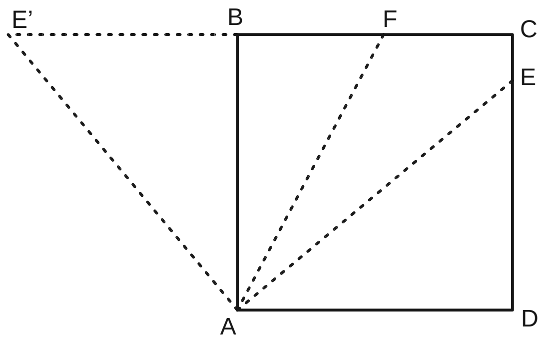
Per iniziare possiamo mettere in evidenza un fattore 10^{10}:

$10^{12} + 20^{11} + 40^{10} = 10^{10}\left(10^2 + 2^{11} \cdot 10 + 4^{10}\right)$. All'interno della parentesi si può notare un quadrato di binomio.

$= 10^{10}\left(10^2 + 2 \cdot 2^{10} \cdot 10 + \left(2^{10}\right)^2\right) = 10^{10}\left(10 + 2^{10}\right)^2 = 10^{10} \cdot 1034^2$.

Siccome $1034 = 2 \cdot 11 \cdot 47$, la soluzione richiesta è 47.

8. L'OMICIDIO [9225]



Sul prolungamento di BC dalla parte di B, costruiamo un punto E' tale che $BE' = DE$.

I triangoli $E'BA$ e ADF risultano congruenti per costruzione.

Sia $\alpha = B\hat{A}F = F\hat{A}E$.

Il triangolo $FE'A$ risulta avere: $E'\hat{A}F = E'\hat{A}B + B\hat{A}F = 90° - 2\alpha + \alpha = 90 - \alpha$, così come $A\hat{F}E' = 90° - \alpha$.

Il triangolo risulta essere isoscele sulla base AF.

Siccome $AE' = AE = FE' = 45 + 80 = 125\ \text{m}$, per il teorema di Pitagora, l'area del quadrato vale $AB^2 = 125^2 - 80^2 = 9225\ \text{m}^2$.

9. LA SALAMOIA [92]

Sia $S = x + y$ e $P = xy$

Calcoliamo $\left(ax^2 + by^2\right)(x + y) = ax^3 + ax^2y + bxy^2 + by^3 = ax^3 + by^3 + xy(ax + by)$ che, secondo i dati conosciuti e le condizioni poste possiamo riscrivere $8S = 16 + 2P$, cioè $4S - P = 8$.

Analogamente calcoliamo $\left(ax^3 + by^3\right)(x + y) = ax^4 + ax^3y + bxy^3 + by^4 = ax^4 + by^4 + xy(ax^2 + by^2)$ che diventa $16S = 40 + 8P$, cioè $2S - P = 5$

Mettendo assieme le due informazioni calcolate si ottiene $S = \dfrac{3}{2}$ e $P = -2$

Calcoliamo $\left(ax^4 + by^4\right)(x + y) = ax^5 + ax^4y + bxy^4 + by^5 = ax^5 + by^5 + xy(ax^3 + by^3)$ che diventa

$40S = ax^5 + by^5 + 16P$. Inserendo le informazioni su S e P appena determinate si ottiene

$ax^5 + by^5 = 40 \cdot \dfrac{3}{2} + 32 = 92$.

10. IL TESTAMENTO [2048]
Si osserva che ogni segno della linea 12 contribuisce al segno della vetta della piramide tante volte quante il valore riportato nel triangolo di tartaglia. Se il valore è pari, il segno può essere indifferentemente $+$ o $-$, altrimenti, per le celle con un numero dispari, i segni $-$ dovranno essere presenti in numero pari.
La linea con 12 celle è l'undicesima del triangolo e, limitandoci alla parità/disparità è:

$$\boxed{D}\boxed{D}\boxed{D}\boxed{D}\boxed{P}\boxed{P}\boxed{P}\boxed{P}\boxed{D}\boxed{D}\boxed{D}\boxed{D}.$$

Il modo per riempire le otto celle dispari con un numero pari di segni $+$ o $-$ è:

$$\binom{8}{0}+\binom{8}{2}+\binom{8}{4}+\binom{8}{6}+\binom{8}{8}=\frac{2^8}{2}=128$$

In totale vi sono $128\cdot 2^4=2048$ righe possibili.

11. RICERCATO [4687]
Indipendentemente dall'ordine dei colori, se la sequenza è ordinata $XXYYZZ$ con i colori accoppiati, c'è una probabilità di $\frac{2}{5}$ di rimanere con i colori accoppiati dopo l'operazione di divisione e ricomposizione, mentre se la sequenza è ordinata $XYYZZX$ con i colori divisi, c'è una probabilità di $\frac{3}{5}$ di ritornare con i colori accoppiati.
In generale la probabilità che al passo n la sequenza sia ordinata è:

$$P(n)=\frac{2}{5}P(n-1)+\frac{3}{5}\overline{P(n-1)}=\frac{2}{5}P(n-1)+\frac{3}{5}(1-P(n-1))=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}P(n-1)$$

Con questa regola ricorsiva possiamo calcolare $P(5)$ sapendo che $P(1)=\frac{2}{5}$:

$$P(2)=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{13}{25};$$

$$P(3)=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\cdot\frac{13}{25}=\frac{62}{125}$$

$$P(4)=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\cdot\frac{62}{125}=\frac{313}{625}$$

$$P(5)=\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\cdot\frac{313}{625}=\frac{1562}{3125}.$$

12. ANCORA IN FUGA [4039]
Il calcolo può essere semplificato osservando che in ogni parentesi, effettuata la somma, il numeratore si può semplificare con il denominatore della frazione successiva:

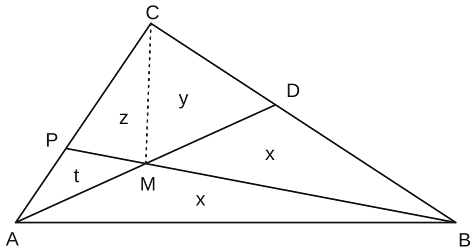
$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)...\left(1+\frac{1}{k}\right)=2020$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot...\cdot\frac{k+1}{k}=2020$$

$$\frac{k+1}{2}=2020$$

$$k=4039.$$

13. IL NASCONDIGLIO [51]



Sia $A_{ABM} = A_{MBD} = x$, $A_{AMP} = t$, $A_{PMC} = z$ e $A_{CMD} = y$.
Da $AM = MD$, segue che $t + z = y$.

Per il Teorema della bisettrice $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{20}{11}$ e quindi $\dfrac{2x}{t+z+y} = \dfrac{20}{11}$

che per quanto visto sopra porta a determinare $\dfrac{2x}{2y} = \dfrac{20}{11}$, cioè $x = \dfrac{20}{11}y$.

Il rapporto tra PM ed MB lo possiamo esprimere in due modi diversi, guardando i triangoli che si formano a destra e a sinistra di PB:

$\dfrac{t}{x} = \dfrac{z}{y+x}$. Sostituendo le informazioni ricavate su x si ottiene:

$$\frac{t}{\frac{20}{11}y} = \frac{z}{y + \frac{20}{11}y}$$

$$z = \frac{31}{20}t.$$

Siccome $t + z = y$, segue che $y = t + \dfrac{31}{20}t = \dfrac{51}{20}t$, e $x = \dfrac{20}{11}y = \dfrac{20}{11}\cdot\dfrac{51}{20}t = \dfrac{51}{11}t$.

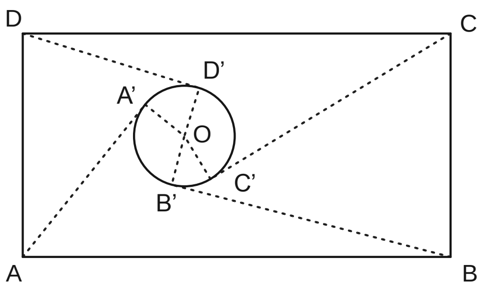
Ora $\dfrac{PC}{PA} = \dfrac{x+y+z}{t+x} = \dfrac{\frac{51}{11}t + \frac{51}{20}t + \frac{31}{20}t}{t + \frac{51}{11}t} = \dfrac{\frac{1922}{11\cdot 20}}{\frac{62}{11}} = \dfrac{31}{20}$

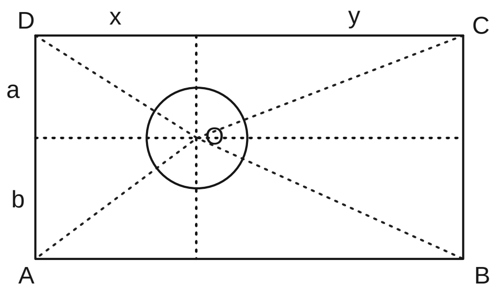
14. L'OMICIDIO DI MAROON [79]

Calcoliamo il numero di sequenza possibili formate dai numeri da 1 a 6 debolmente crescenti. Questo lo possiamo fare sfruttando le combinazioni con ripetizione: $C^*_{6,4} = \dbinom{6+4-1}{4} = \dbinom{9}{4} = 126$.

La probabilità cercata è $P = \dfrac{126}{6^4} = \dfrac{7}{72}$

15. RIVELAZIONI [23]





Osserviamo, prima di tutto la relazione che esiste tra i segmenti che uniscono i vertici del rettangolo con il centro della circonferenza: $AO^2 + CO^2 = \left(x^2 + b^2\right) + \left(y^2 + a^2\right) = \left(x^2 + a^2\right) + \left(y^2 + b^2\right) = DO^2 + BO^2$

A questo punto, sempre con il teorema di Pitagora possiamo scrivere che: $AA'^2 = AO^2 - r^2$, $BB'^2 = BO^2 - r^2$, $CC'^2 = CO^2 - r^2$ e $DD'^2 = DO^2 - r^2$, dove r è il raggio della circonferenza.
Osserviamo che $AA'^2 + CC'^2 = AO^2 - r^2 + CO^2 - r^2$ che per quanto dimostrato più sopra è uguale a $= BO^2 - r^2 + DO^2 - r^2 = BB'^2 + DD'^2$.
La misura di DD' è quindi:

$$DD' = \sqrt{AA'^2 + CC'^2 - BB'^2} = \sqrt{37^2 + 29^2 - 41^2} = 23 \text{ cm}.$$

16. LA CATTURA [50]

La divisibilità per 12 implica che il numero sia divisibile contemporaneamente per 3 e per 4. Cominciamo da quest'ultima. Per garantire la divisibilità per 2 anche se le cifre vengono permutate, è necessario che tutte le cifre siano pari, e per la divisibilità per 4 che siano solamente "4" o "8".
Per garantire la divisibilità per 3 è ora necessario che la somma delle cifre sia un multiplo di 3 e questo accade solamente se utilizziamo otto 8 e due 4 oppure otto 4 e due 8.
Infine, per garantire la divisibilità per 11 è necessario che vi siano nei posti pari e nei posti dispari lo stesso numero di 8 e di 4.
Siccome $ABBBB$ ha un numero di anagrammi pari a 5 ciascuna delle due configurazioni sopra determinate ha $5 \cdot 5 = 25$ possibilità.
I numeri cercati sono quindi 50.

17. LA FINE DI CARTOONIA [2028]

Raccogliamo a fattor comune la potenza minore:
$2^{2020}\left(1+2^4+2^5+2^6+2^8\right)$ occupiamoci della parentesi.

Stiamo cercando un valore per cui $1+2^4+2^5+2^6+2^8+2^x=(1+2^a+2^b)^2=1+2^{2a}+2^{2b}+2^{a+1}+2^{b+1}+2^{a+b+1}$.

La presenza di 2^5, unica potenza dispari, ci porta a identificare, una delle due potenze. Sia $a=4$.
L'uguaglianza diventa:

$$\cancel{1}+2^4+\cancel{2^5}+2^6+\cancel{2^8}+2^x=\cancel{1}+\cancel{2^8}+2^{2b}+\cancel{2^5}+2^{b+1}+2^{b+5}$$

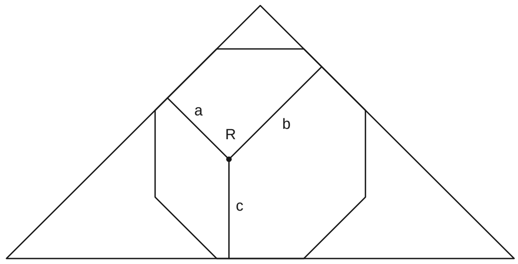
$$2^4+2^6+2^x=2^{2b}+2^{b+1}+2^{b+5}$$

L'uguaglianza risulta verificate quando $b=3$
Quindi $x=8$ e la potenza cercata è $2^k=2^{2020}\cdot 2^8=2^{2028}$.
La risposta è $k=2028$.

18. LA FABBRICA ACME [2052]

Sia r il raggio della circonferenza, l il lato dell'ottagono e siano a, b e c le distanze di R rispettivamente da MF_2, F_3F_4 ed EJ.

Determiniamo prima di tutto la relazione che c'è tra a, b e c racchiudendo l'ottagono in un triangolo rettangolo isoscele come nella figura a lato riportata.



I lati del triangolo risultano essere: il cateto misura $\left(2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)l$ mentre l'ipotenusa $\left(2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\sqrt{2}l$.

L'area del triangolo può essere scritta in funzione del solo lato dell'ottagono $A=\frac{1}{2}\left(2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2 l^2$ o in funzione del lato e delle distanze di R dai lati: $A=\frac{1}{2}(a+b)\left(2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)l+\frac{1}{2}c\left(2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\sqrt{2}l$

Uguagliando le due relazioni si ottiene:

$$\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}(a+b)\cancel{\left(2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)}\cancel{l}+\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}c\cancel{\left(2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)}\sqrt{2}\cancel{l}=\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\left(2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^{\cancel{2}} l^{\cancel{2}}$$ che semplificata diventa

$$a+b+c\sqrt{2}=\left(2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)l$$

Sia ora K l'area della parte dei triangoli mistilinei compresa tra il lato dell'ottagono e la circonferenza.

Dai dati del problema noi conosciamo che $\frac{al}{2}+K=400\ \text{cm}^2$, $\frac{bl}{2}+K=500\ \text{cm}^2$ e dobbiamo calcolare il valore di

$$X=\frac{cl}{2}+K$$

Dalla relazione precedentemente trovata, facciamo in modo di far comparire le aree conosciute:

$a+b+c\sqrt{2}=\left(2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)l$, moltiplico per $\frac{l}{2}$

$\dfrac{al}{2}+\dfrac{bl}{2}+\dfrac{cl\sqrt{2}}{2}=\left(1+\dfrac{3}{4}\sqrt{2}\right)l^2$. Per quanto detto sopra la relazione diventa

$400-K+500-K+(X-K)\sqrt{2}=\left(1+\dfrac{3}{4}\sqrt{2}\right)l^2$ che possiamo riscrivere

$X\sqrt{2}=\left(1+\dfrac{3}{4}\sqrt{2}\right)l^2-900+2K+K\sqrt{2}$ e quindi

$$X=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{4}\right)l^2-450\sqrt{2}+K(1+\sqrt{2})$$

Resta ora da determinare il valore di K e di l.

$$K=\frac{\pi r^2}{8}-\frac{r^2 sen 45°}{2}=r^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

e in ottagono, la relazione tra lato e raggio è $l=r\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Mettiamo tutto assieme sapendo che $\pi r^2=10000\ \text{cm}^2$:

$$X=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3}{4}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)r^2+r^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)(1+\sqrt{2})-450\sqrt{2}=$$

$$\frac{10000}{\pi}\left(\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{\sqrt{2}}{4}}+\frac{\pi}{8}-\cancel{\frac{\sqrt{2}}{4}}+\frac{\pi\sqrt{2}}{8}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)-450\sqrt{2}=$$

$$\frac{10000}{\pi}\left(\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{\sqrt{2}}{4}}+\frac{\pi}{8}-\cancel{\frac{\sqrt{2}}{4}}+\frac{\pi\sqrt{2}}{8}-\cancel{\frac{1}{2}}\right)-450\sqrt{2}=$$

$1250+1250\sqrt{2}-450\sqrt{2}=1250+800\sqrt{2}\ \text{cm}^2$

La soluzione richiesta è $1250+800+2=2052$.

19. LA FINE DELLE FAINE [1568]

La situazione iniziale è:

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

Se sposto 3 chicchi dalla settima casella alla prima ($6\cdot 3$ mosse), 2 dalla sesta alla seconda ($4\cdot 2$ mosse), 1 dalla quinta alla terza (2 mosse) con $28\cdot 7=196$ mosse riesco ad avere lo stesso numero di chicchi in ogni casella di ogni riga.

4	4	4	4	4	4	4
11	11	11	11	11	11	11
18	18	18	18	18	18	18
25	25	25	25	25	25	25
32	32	32	32	32	32	32
39	39	39	39	39	39	39
46	46	46	46	46	46	46

Ora, agendo in maniera analoga sulle colonne dove i chicchi da spostare sono 21, 14 e 7, con un totale di $196+\left(21\cdot 6+14\cdot 4+7\cdot 2\right)\cdot 7=1568$ mosse riesco ad equilibrare tutte le caselle.

20. COLPO DI SCENA [422]

La superfice del solido è pari a alla metà di quella del cubo, più l'area della figura nata dalla sezione, che è un rombo con diagonale maggiore pari alla diagonale del cubo e diagonale minore la diagonale del quadrato di base.

Il valore cercato è: $S_{TOT}=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 10^2+\dfrac{10\sqrt{3}\cdot 10\sqrt{2}}{2}=300+50\sqrt{6}\cong 422,47\ \text{cm}^3$.