SOLUZIONI GARA DI MATEMATICA ON-LINE
(19/10/2020)

1. IN GELATERIA [180]
Indichiamo con x, y e z le quantità di monete di Charlie Brown, Linus e Schroeder rispettivamente e a, b e c le monete di Lucy, Piperita Patty e Violet.
Le informazioni del problema si traducono in $x=3+a$, $z=12+c$ e $y=5+b$. Sappiamo inoltre che y è il valore più grande dei sei e che $a,b,c \in \{20-x, 20-y, 20-z\}$. Avendo somma 20 le coppie dovranno avere monete con la stessa parità. Per questo motivo b non può essere accoppiato con y e x con a.
Supponiamo $y \leftrightarrow a$ allora o $x \leftrightarrow b$ e $z \leftrightarrow c$, oppure $x \leftrightarrow c$ e $z \leftrightarrow b$
Nel primo caso si ottiene un assurdo in quanto $a=20-y$ e $b=20-x$ sostituite nelle informazioni del problema portano a $x=3+20-y$ e $y=5+20-x$ cioè $x+y=23$ e $x+y=25$.
Nel secondo caso si ha $a=20-y$, $b=20-z$ e $c=20-x$. Sostituendo e risolvendo il sistema si ottiene

$$\begin{cases} x=3+20-y \\ z=12+20-x \\ y=5+20-z \end{cases} \qquad \begin{cases} x=15 \\ y=8 \\ z=17 \end{cases}$$

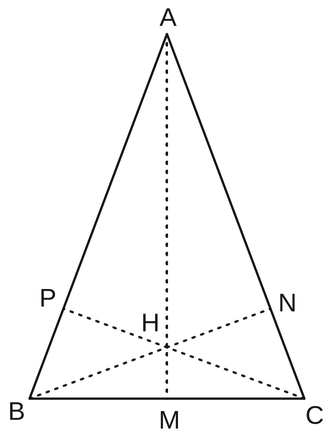
Che però non verifica la condizione di avere y più grande di tutti i valori.
Resta una sola possibilità: $y \leftrightarrow c$, $x \leftrightarrow b$ e $z \leftrightarrow a$, cioè

$$\begin{cases} x=3+20-z \\ z=12+20-y \\ y=5+20-x \end{cases} \qquad \begin{cases} x=8 \\ y=17 \\ z=15 \end{cases}$$

Che risolve il problema.
Di conseguenza $a=5$, $b=12$ e $c=3$.
La soluzione richiesta è $5 \cdot 12 \cdot 3 = 180$.

2. I NUMERI DI PIPERITA PATTY [9219]
Calcoliamo quali numeri hanno prodotto dispari: da 1 a 9 ce ne sono 5. Da 10 a 99, $5 \cdot 5 = 25$. Da 100 a 999 ne abbiamo $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ e da 1000 a 9999 ne abbiamo $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$. In totale abbiamo 780 prodotti pari, e di conseguenza $9999-780=9219$ prodotti pari.

3. L'ALLENAMENTO DI BASEBALL [925]
Risolviamo il problema dividendo le dimensioni dei lati per 100. Tracciamo le altezze e siano M, N e P i loro piedi (come in figura).



Il triangolo BMA è retto, per Pitagora, la dimensione mancante è $AM = 4\ \mathrm{m}$.
Il triangolo ABC ha area $A_{ABC} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12\ \mathrm{m}^2$ e l'altezza relativa al lato obliquo misura $BN = \frac{24}{5}\ \mathrm{m}$. Siano $AH = x$ e $BH = CH = y$.
Esprimiamo l'area del triangolo come somma dei triangoli BHC, CHA e BHA:

$$A_{ABC} = \frac{6\cdot(4-x)}{2} + 2 \cdot \frac{5 \cdot \left(\frac{24}{5} - y\right)}{2} = 12 - 3x + 24 - 5y = 36 - 3x - 5y$$

Vale quindi la relazione $36-3x-5y=12$, cioè $3x+5y=24$.
Per il Teorema di Pitagora applicato al triangolo BHM si ha che $y^2 = (4-x)^2 + 9$.
Mettendo a sistema le due equazioni trovate si ottiene come unica soluzione $x = \frac{7}{4}\ \mathrm{m}$ e $y = \frac{15}{4}\ \mathrm{m}$.
Ricordando che avevamo diviso per 100, la soluzione richiesta è:

$$AH + BH + CH = x + 2y = \left(\frac{7}{4} + 2 \cdot \frac{15}{4}\right) \cdot 100 = 925\ \mathrm{m}.$$

4. IL TRENO DI SNOOPY [160]

In 5 secondi il treno percorre $980-790=190\ \mathrm{m}$, quindi viaggia alla velocità di $38\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. La lunghezza del treno è $38\cdot 30-980=160\ \mathrm{m}$.

5. IL PROBLEMA DI SCHROEDER [6]

Il problema ci chiede di fattorizzare il numero $2013\cdot 2014+2005$. Cerchiamo un modo furbo per non dover fare tutti i calcoli:

$2013\cdot 2014+2005=(2014-1)\cdot 2014+2005=2014^2-2014+2005=2014^2-9=2014^2-3^2=$
$(2014-3)(2014+3)=2011\cdot 2017$

Gli ultimi due fattori trovati sono entrambi numeri primi. La loro differenza è $2017-2011=6$.

6. LO SCORBORADUNO [250]

Siano a_V gli algebristi sinceri e a_B quelli bugiardi, g_V i geometri sinceri e g_B quelli bugiardi ed infine p_V gli algebristi sinceri e p_B quelli bugiardi.

Alla domanda "Lei è un algebrista?" rispondono "si" a_V, g_B e p_B.

Alla domanda "Si occupa di Geometria??" rispondono "si" a_B, g_V e p_B.

Alla domanda "È un probabilista?" rispondono "si" a_B, g_B e p_V.

In totale abbiamo che $(a_V+g_B+p_B)+(a_B+g_V+p_B)+(a_B+g_B+p_V)=100+540+1610=2250$.

Siccome $(a_V+a_B)+(g_V+g_B)+(p_V+p_B)=2000$ per differenza, $a_B+g_B+p_B=2250-2000=250$.

7. LA MAESTRA DI LINUS E LE CIFRE UGUALI [41]

Detto x il termine centrale della progressione, il problema può essere formalizzato tramite l'equazione $(x-2)^2+x^2+(x+2)^2=1111\cdot y$, dove y è la cifra ripetuta.

Semplificando l'equazione otteniamo $3x^2=1111\cdot y-8$.

Guardando l'equazione modulo 3 abbiamo che $y\equiv 2 \bmod 3$ e quindi abbiamo le seguenti possibilità: $y=2$, $y=5$ o $y=8$.

Verifichiamo per quale di queste $\dfrac{1111\cdot y-8}{3}$ è un quadrato perfetto.

$y=2$: $\dfrac{1111\cdot 2-8}{3}=738$ che non è un quadrato perfetto. $y=5$: $\dfrac{1111\cdot 5-8}{3}=1849=43^2$.

$y=8$: $\dfrac{1111\cdot 8-8}{3}=2960$ che non è un quadrato perfetto.

Il numero cercato è $43-2=41$.

8. LA CENA DI PIPERITA PATTY [240]

Il problema è equivalente a contare quante stringa "$XXYYZZ$" esistono in cui le due X, le due Y e le due Z non sono attaccate, e poi moltiplicare il risultato per $2^3=8$ che sono i modi per distribuire le tre coppie.

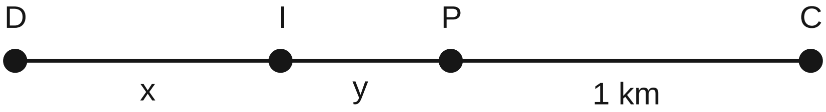
Risolviamo il problema utilizzando il principio di inclusione/esclusione:

Tutte le stringhe sono: $\dfrac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}=90$. Le stringhe con una coppia seduta vicina ($\boxed{XX}YYZZ$) sono $\dfrac{5!}{2!\cdot 2!}=30$ ma abbiamo tre possibili coppie, quindi $30\cdot 3=90$. Le stringhe con due coppie sedute vicine ($\boxed{XX}\boxed{YY}ZZ$) sono $\dfrac{4!}{2!}=12$ ma abbiamo tre modi per scegliere due coppie, quindi $12\cdot 3=36$. Infine tre coppie sedute vicine ($\boxed{XX}\boxed{YY}\boxed{ZZ}$) che sono $3!=6$.

Per il principio di inclusione esclusione abbiamo che non siede vicino nessuna coppia in $90-90+36-6=30$ casi.

La soluzione richiesta è $30\cdot 8=240$ possibili configurazioni.

9. CHARLIE BROWN E IL DOTTORE [2400]
Rappresentiamo la situazione descritta dal problema.

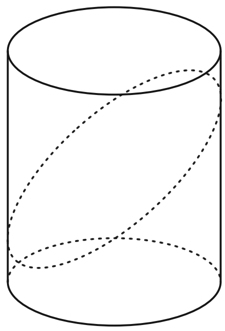


Sia D la casa del dottore, C la casa di Charlie Brown, P il punto in cui si trova Charlie Brown quando il dottore esce di casa il dottore e I il punto in cui i due si incontrano. Sia, inoltre, $x = DI$ e $y = IP$.

L'informazione sulle velocità ci dice che $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ e l'informazione sulla strada percorsa da Charlie Brown ci dice che $4 \cdot 2x = 2(x + y + 1\ \mathrm{km})$ e quindi $3x - y = 1\ \mathrm{km}$. Risolvendo a sistema le due equazioni appena scritte, si ottiene $x = \frac{3}{5}\ \mathrm{km} = 600\ \mathrm{m}$ e $y = \frac{4}{5}\ \mathrm{km} = 800\ \mathrm{m}$.

La distanza tra le due abitazioni è $CD = 1000 + 800 + 600 = 2400\ \mathrm{m}$.

10. LA PISCINA DI SNOOPY [5890]
Il solido è una sezione di cilindro. Immaginiamo di attaccare alla forma descritta una seconda forma identica ma simmetrica rispetto al centro dell'ellisse. Si ottiene un cilindro di altezza $6\ \mathrm{m}$ (vedi figura).



Il volume richiesto è $V_{Piscina} = \frac{1}{2}\pi \cdot 25^2 \cdot 6 = 1875\pi \cong 5890{,}5\ \mathrm{m}^3$

11 SFIDA A CALCIO BALILLA [17]
La probabilità che Snoopy vinca 2-0 è del $\frac{60}{100} \cdot \frac{60}{100} = \frac{9}{25}$.

La probabilità che Linus vinca 2-0 è del $\frac{40}{100} \cdot \frac{40}{100} = \frac{4}{25}$

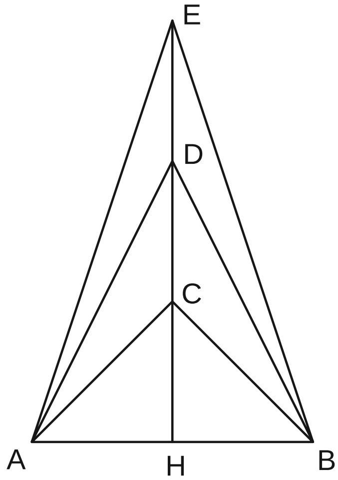
Con una probabilità dei $\frac{12}{25}$ dopo due reti saranno sull'1-1 che equivale ad essere sullo 0-0, quindi la probabilità di vincere di Linus è: $P(V) = \frac{4}{25} + \frac{12}{25} \cdot P(V)$. Risolvendo l'equazione si ottiene di $P(V) = \frac{4}{13}$.

12. JOE FALCHETTO E LA MATEMATICA [52]
Siccome $2k+1$ è dispari, $f(2k+1) = 2k+1+3 = 2k+4 = 2(k+2)$. $f\left(f(2k+1)\right) = f\left(2(k+2)\right) = k+2$.

Ora vi sono de possibilità: se $k+2$ è dispari, allora $f\left(f\left(f\left(2k+1\right)\right)\right) = f\left(k+2\right) = k+5$ che risulta valere 27 per $k = 22$ che però non è dispari, come richiesto.

se $k+2$ è pari, allora $f\left(f\left(f\left(2k+1\right)\right)\right) = f\left(k+2\right) = \frac{k+2}{2}$ che risulta valere 27 per $k = 52$.

13. LA RISTRUTTURAZIONE DELLA CUCCIA DI SNOOPY [180]



<u>Prima soluzione</u>

Il triangolo ABC è un triangolo rettangolo isoscele con lato $BC = \sqrt{2}\ \mathrm{cm}$.
Osserviamo i triangoli DCB e ECB. Vale la relazione
$BC : CD = EC : BC$ infatti, sostituendo i valori noti dei segmenti si ottiene
$\sqrt{2} : 1 = 2 : \sqrt{2}$. I triangoli sono simili, quindi $C\hat{E}B = D\hat{B}C$ e quindi
$C\hat{D}B + C\hat{E}B = C\hat{D}B + D\hat{B}C = H\hat{C}B = 45°$.
$A\hat{C}B + A\hat{D}B + A\hat{E}B = 2\left(H\hat{C}B + H\hat{D}B + H\hat{E}B\right) = 2\left(45° + 45°\right) = 180°$.

Seconda soluzione

Sia $A\hat{D}H=\alpha$ e $A\hat{E}H=\beta$. Vale $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$ e $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$.

Calcoliamo $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1$

Quindi $\alpha+\beta=45°$ e di conseguenza $A\hat{C}B+A\hat{D}B+A\hat{E}B=180°$.

14. SCOMPOSIZIONI ALGEBRICHE PER WOODSTOCK [3394]

Siano k e $\frac{1}{k}$ le radici di x^2+ax+b e p, q e r le radici di x^3+cx^2+dx+e.

Sfruttiamo le relazioni coefficienti, radici. Siccome $k\cdot\frac{1}{k}=1$, $b=1$ e di conseguenza $e=56$.

Siccome $k+\frac{1}{k}+p+q+r=0$ (coefficiente del termine di grado 4), si ha che $a=-\left(k+\frac{1}{k}\right)=p+q+r=-c$.

Riscrivendo la scomposizione abbiamo $p(x)=x^5-209x+56=(x^2+ax+1)(x^3-ax^2+dx+56)$
Calcoliamo, dal prodotto, i termini di secondo e di terzo grado:

$(56+ad-a)x^2 \Rightarrow 56+ad-a=0$

$(1-a^2+d)x^3 \Rightarrow 1-a^2+d=0$

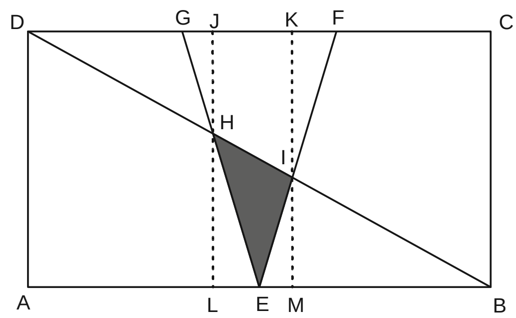
Mettendo assieme le due relazioni trovate, e sostituendo $d=a^2-1$ nella prima si ha l'equazione $56+a(a^2-1)-a=0$ e cioè $a^3-2a+56=0$ la cui unica soluzione reale è $a=-4$.

$d=15$.

Dobbiamo verificare che il termine di primo grado $(d+56a)x$ sia quello corretto, cosa che accade perfettamente per i valori trovati $d+5a=-209$.

La scomposizione è $p(x)=x^5-209x+56=(x^2-4x+1)(x^3+4x^2+15x+56)$ che porta a determinare $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16+1+16+225+3136=3394$

15. L'AQUILONE [4285]



Sia $AB=x$ e $AD=y$ tali che $xy=1000\text{ cm}^2$.
Determiniamo le altezze dei triangoli EBH e EBI.
Tracciamo le perpendicolari ai lati passanti per H ed I
Il triangolo EBH è simile al triangolo GDH con rapporto di similitudine $\frac{EB}{DG}=\frac{\frac{1}{2}x}{\frac{1}{3}x}=\frac{3}{2}=\frac{HL}{HJ}$

Siccome $HL+HJ=y$, $HL+\frac{2}{3}HL=y$ cioè $HL=\frac{3}{5}y$.

Analogamente per il triangolo EBI che è simile al triangolo FDI con rapporto di similitudine

$\frac{EB}{DF}=\frac{\frac{1}{2}x}{\frac{2}{3}x}=\frac{3}{4}=\frac{IM}{IK}$.

Siccome $IM+IK=y$, $IM+\frac{4}{3}IM=y$ cioè $IM=\frac{3}{7}y$.

$$A_{EHI}=A_{EBH}-A_{EBI}=\frac{EB\cdot HL}{2}-\frac{EB\cdot IM}{2}=\frac{EB}{2}(HL-IM)=\frac{x}{4}\cdot\left(\frac{3}{5}y-\frac{3}{7}y\right)=\frac{3}{70}xy=\frac{3}{70}\cdot 1000\text{ cm}^2\cong 4285,71\text{ mm}^2.$$

16. IL PIANO DI VOLO [0]

Sia $a = x + \sqrt{x^2+1}$ e di conseguenza $\frac{1}{a} = y + \sqrt{y^2+1}$

Ricaviamo x dalla prima relazione:

$a - x = \sqrt{x^2+1}$

$(a-x)^2 = x^2 + 1$

$a^2 - 2ax + \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + 1$

$x = \frac{a^2-1}{2a}$

Procediamo analogamente per y:

$\frac{1}{a} - y = \sqrt{y^2+1}$

$1 - ay = a\sqrt{y^2+1}$

$(1-ay)^2 = a^2(y^2+1)$

$1 - 2ay + \cancel{a^2y^2} = \cancel{a^2y^2} + a^2$

$y = \frac{1-a^2}{2a}$

Calcoliamo il valore cercato: $x + y = \frac{a^2-1}{2a} + \frac{1-a^2}{2a} = 0$

17. SOMME DI COEFFICIENTI [0]

Il risultato richiesto è 0 in quanto il polinomio non ha alcun termine di grado dispari.
Infatti un termine di gradi dispari si ottiene moltiplicando un termine pari (positivo) della prima parentesi con uno dispari della seconda parentesi (o viceversa) ed ha, nella somma algebrica, il termine opposto ottenuto prendendo lo stesso termine pari dalla seconda parentesi e lo stesso termine dispari (negativo) dalla prima.

18. MULTIPLI… MA NON TROPPO [27]

Fattorizzando si osserva che $\overline{bababa} = \overline{ba} \cdot 10101 = \overline{ba} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$.

Siccome $\overline{bbb} = b \cdot 111 = b \cdot 3 \cdot 37$, non potendo, per ipotesi b dividere $\overline{ba}$, $b = 7$.

Siccome $\overline{aaa} = a \cdot 111 = a \cdot 3 \cdot 37$, visto che $a \neq b = 7$, a deve dividere $\overline{ba}$, cioè $a \mid 70 + a$ e quindi essendo $a \neq 7$, $a \mid 10$ quindi abbiamo tre possibilità: $a = 1$, $a = 2$ o $a = 5$.

Verifichiamo ora in quale delle tre situazioni $\overline{ab}$ divide $\overline{bababa}$.

717171 non è divisibile per 17 (non c'è il fattore 17 nella scomposizione di $\overline{bababa}$);
727272 è divisibile per 27.
757575 non è divisibile per 57 (non c'è il fattore 19 nella scomposizione di $\overline{bababa}$).
La soluzione richiesta è 27.

19. ESTRAZIONE FORTUNATA [209]

Affinché sia possibile l'evento richiesto, è necessario che la somma della prima e della seconda pallina sia al massimo 10. Su $10 \cdot 10 = 100$ estrazioni possibili, solo $\frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ verificano la condizione.

Una volta stabilito il valore della somma delle prime due palline, abbiamo una sola possibilità su 10 che dalla terza urna esca proprio quel valore.

La probabilità richiesta è: $P(x_1 + x_2 = x_3) = \frac{45}{100} \cdot \frac{1}{10} = \frac{9}{200}$.

20. FURTO DI COPERTA [17]

Sviluppando l'equazione $(x+a)^4=(x+b)^4$ si ottiene $4(a-b)x^4+6(a^2-b^2)x^2+4(a^3-b^3)+a^4-b^4=0$ che possiamo dividere per $(a-b)$ vista l'ipotesi $a \neq b$.

L'equazione diventa $4x^4+6(a+b)x^2+4(a^2+ab+b^2)+(a^2+b^2)(a+b)=0$

Confrontando le due equazioni si ha:

$a+b=1$; $a^2+ab+b^2=3$ e $(a^2+b^2)(a+b)=5$

Sostituendo la prima nella terza si ha $a^2+b^2=5$ che messa nella seconda ci permette di determinare $ab=-2$

Risolvendo il sistema $\begin{cases} a+b=1 \\ ab=-2 \end{cases}$ si determina la soluzione $(1;-2)$ (e la sua simmetrica).

(N.B. avendo a che fare con 3 equazioni e due incognite è necessario verificare che la soluzione trovata le verifica effettivamente tutte e 3.)

La soluzione richiesta è $a^4+b^4=16+1=17$