SOLUZIONI GARA DI MATEMATICA ON-LINE (10/1/2022)

1. STRANE POTENZE [322]

Calcoliamo $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = x^3+3x+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}$ che possiamo anche scrivere $\left(x+\frac{1}{x}\right)^3 = x^3+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^3}$ e quindi $3^3 = x^3+3\cdot 3+\frac{1}{x^3}$. Abbiamo appena scoperto che $x^3+\frac{1}{x^3}=18$.

Calcoliamo ora il quadrato dell'ultima espressione trovata: $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^2 = x^6+2+\frac{1}{x^6}$.

Scopriamo così che $x^6+\frac{1}{x^6}=18^2-2=322$.

2. RADICI [2870]

Osserviamo che in qualsiasi polinomio $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_1x+a_0$, la somma dei quadrati delle radice (per le formule di Viete) vale:

$x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+...+x_n^{\,2}=(x_1+x_2+...+x_n)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+...+x_{n-1}x_n)=a_{n-1}^{\,2}-2a_{n-2}$.

Il risultato non dipende dal termine noto a_0 e quindi due polinomi $p(x)$ e $q(x)$ tali che $p(x)=q(x)+k$ hanno la medesima somma dei quadrati delle radici.

Nel nostro caso $q(x)=x(x-1)(x-2)...(x-20)$ ha per radici tutti i numeri interi da 0 a 20.

Per quanto detto sopra, la somma dei quadrati delle radici di $p(x)$ vale $0^2+1^2+2^2+...+20^2=\frac{20\cdot 21\cdot 41}{6}=2870$

3. POLINOMI E RADICI [400]

Per le formule di Viete sappiamo che $a+b+c=7$, $ab+ac+bc=3$ e $abc=1$.

Se $q(x)=x^3-Sx^2+Qx-P$, abbiamo che

$S=ab+ac+bc=3$;

$Q=ab\cdot ac+ab\cdot bc+ac\cdot bc=a^2bc+ab^2c+abc^2=abc(a+b+c)=7$;

$P=ab\cdot ac\cdot bc=\left(abc\right)^2=1$.

$q(x)=x^3-3x^2+7x-1$ e quindi $\left(q(3)\right)^2=\left(27-27+21-1\right)=20^2=400$.

4. MINIMO [8]

<u>Prima soluzione.</u>

Osserviamo che in generale $k+\frac{1}{k}\geq 2$ (con $k\geq 0$), infatti eseguendo il minimo comune multiplo si ottiene $\frac{k^2-2k+1}{k}\geq 0$, cioè $\frac{\left(k-1\right)^2}{k}\geq 0$ che è una disuguaglianza sempre vera il cui minimo 2 viene raggiunto quando $k=1$.

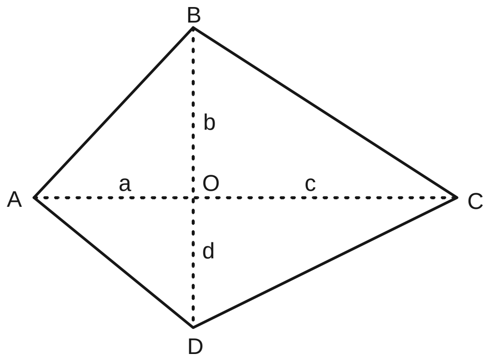
Nel caso proposto dal problema, accoppiando opportunamente i termini, si osserva che per tutti il minimo si ottiene ponendo $x=1$ e quindi il minimo della funzione vale 8.

<u>Seconda soluzione</u>

Utilizziamo la disuguaglianza tra la media aritmetica (AM) e la media geometrica (GM) applicata agli elementi di $f(x)$: $\frac{x^3+x^2+x+\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{8}\geq \sqrt[8]{x^3\cdot x^2\cdot x\cdot \sqrt{x}\cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x^3}}=1$. Ne segue immediatamente che $x^3+x^2+x+\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\geq 8$.

Il minimo 8 è ottenuto quando $x^3 = x^2 = x = \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^3}$ cosa che accade effettivamente quando $x = 1$.

5. IL QUARTO LATO [8000]



Sia O il punto di intersezione tra AC e BD.
Siano $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$ e $d = OD$.
Applicando il Teorema di Pitagora ai tre triangoli AOB, BOC e AOD si ottiene che

$a^2 + b^2 = 1$; (I)

$b^2 + c^2 = 49$ (II)

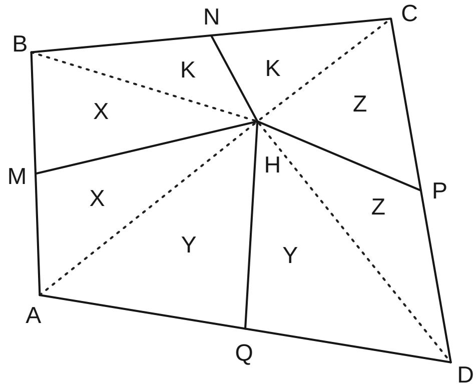
$a^2 + d^2 = 16$ (III)

Facendo il calcolo $II + III - I$ otteniamo:

$c^2 + d^2 = 64$

che, sempre per il Teorema di Pitagora ci dice che $DC^2 = 8^2$ e quindi $DC = 8 \text{ m} = 8000 \text{ mm}$.

6. QUESTIONE DI AREE [28]



Se uniamo il punto H con i quattro vertici del quadrilatero, otteniamo delle coppie di triangoli equivalenti. Riferendoci ad essi come in figura, si osserva che:

$X + K = 32$;

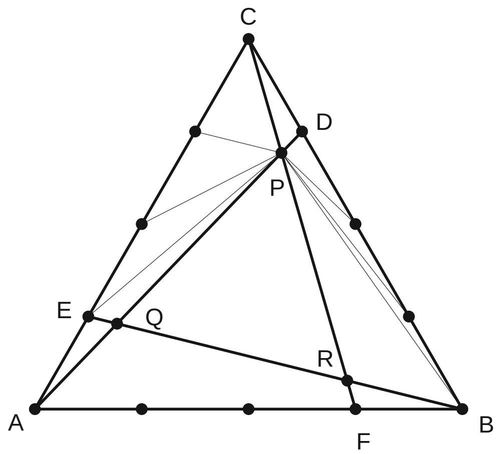
$X + Y = 20$ e

$Y + Z = 16$.

Per Calcolare $Z + K$ possiamo procedere nel modo seguente:

$Z + K = (X + K) + (Y + Z) - (X + Y) = 32 + 16 - 20 = 28 \text{ cm}^2$

7. RAPPORTI [17]



Siano P, Q ed R i punti di intersezione dei segmenti tracciati, come in figura a fianco.

Sia $x = A_{PDC} = A_{FRB} = A_{AEQ}$ e sia S l'area del triangolo ABC.

Osserviamo che $A_{PBF} = \frac{1}{4}S - 4x$; $A_{APC} = \frac{1}{4}S - x$ e quindi

$$A_{ABP} = S - A_{APC} - A_{PBC} = S - \left(\frac{1}{4}S - x\right) - 4x = \frac{3}{4}S - 3x.$$

Siccome $A_{PFB} = \frac{1}{4}A_{ABP}$, sostituendo e risolvendo…

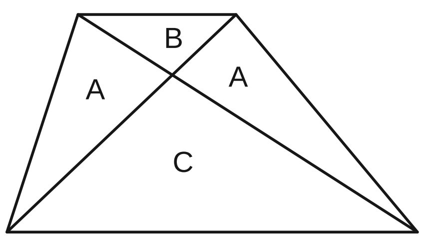
$$\frac{1}{4}S - 4x = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}S - 3x\right)$$

$$\frac{1}{4}S - 4x = \frac{3}{16}S - \frac{3}{4}x$$

$$x = \frac{1}{52}S.$$

Ecco quindi che $\frac{A_{PQR}}{A_{ABC}} = \frac{S - \frac{3}{4}S + 3x}{S} = \frac{S - \frac{3}{4}S + \frac{3}{52}S}{S} = \frac{4}{13}$

8. IL TRAPEZIO [25]



Tracciando le due diagonali e riferendoci alle zone come riportato nella figura a fianco, dai dati del problema si possono scrivere le seguenti equazioni:

$A + B = 24$; $A + D = 40$.

Si può facilmente dimostrare (scrivendo le aree dei triangoli utilizzando come basi le parti delle diagonali) che vale la relazione $A^2 = BC$.

Sostituendo le prime due equazioni nella terza otteniamo
$A^2=(24-A)(40-A)$ equazione che risolta porta a determinare $A=15\ \mathrm{cm}^2$ e di conseguenza $C=40-15=25\ \mathrm{cm}^2$

9. MESSAGGI VOCALI [715]

Il problema equivale a scegliere 9 vocali, anche ripetute dall'insieme $V=\{a,e,i,o,u\}$.

La soluzione è $C^*_{5,9}=\binom{5+9-1}{9}=\binom{13}{9}=715$.

10. PROBLEMI ELETTRICI [43]

Scelgo un filo a caso (+ o -… no importa) questo ha una probabilità di $\frac{4}{7}$ di essere collegato correttamente.

Ora procedo con lo stesso ragionamento avendo però 6 fili.

La probabilità cercata è $P(+/-)=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{35}$.

La risposta richiesta è $8+35=43$.

11. QUANTI TRIANGOLI [9840]

Dei 40 punti ne devo scegliere 3 cosa che posso fare in $\binom{40}{3}=9880$, ma così facendo ho contato anche i triangoli degeneri.

Per avere un triangolo degenere devo aver scelto i 3 punti su una stessa retta, cosa che posso fare in $10\cdot\binom{4}{3}=40$ modi diversi.

I triangoli sono $9880-40=9840$.

12. AMICI AL TELEFONO [61]

Calcoliamo la probabilità che tutti e 4 riescano a comunicare con le quattro ragazze.
Il primo ragazzo chiama chi vuole senza problemi.

Il secondo comunicherà con una ragazza con probabilità $\frac{3}{4}$, mentre il secondo potrà farlo con probabilità $\frac{2}{4}$.

All'ultimo resta una sola possibilità, quindi la sua probabilità sarà di $\frac{1}{4}$.

La probabilità cercata è: $P(\text{almeno 2 chiamano la stessa ragazza})=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{58}{64}=\frac{29}{32}$.

La risposta richiesta è $29+32=61$.

13. FRAZIONI [89]

Scriviamo la relazione algebrica tutta in funzione di una sola variabile:

$$2020b+2020a=ab$$
$$ab-2020b=2020a$$
$$(a-2020)b=2020a$$
$$b=\frac{2020a}{a-2020}=\frac{2020a-2020^2+2020^2}{a-2020}=2020+\frac{2020^2}{a-2020}$$

Dall'ultima uguaglianza si osserva che tutte le soluzioni intere per b implicano che $\frac{2020^2}{a-2020}$ deve essere intero, e quindi $a-2020$ deve essere un divisore di 2020^2.

Siccome $2020=2^2\cdot5\cdot101$, $2020^2=2^4\cdot5^2\cdot101^2$ che ha 45 divisori postivi e 45 divisori negativi.

Da questi dobbiamo togliere il caso $a-2020=-2020$ che porterebbe ad avere $a=0$ contro le condizioni iniziali del problema.

Vi sono in tutto 89 coppie di soluzioni intere.

14. QUADRATI [11]
Sia $n^2+14n+14=k^2$, allora $n^2+14n+14-k^2=0$ ha soluzioni intere e positive.
Siccome $n_{1,2}=-7\pm\sqrt{35+k^2}$, cerchiamo i valori di k per cui il discriminante sia un quadrato perfetto.
$35+k^2=a^2$, cioè $35=a^2-k^2=(a+k)(a-k)$.
$35=5\cdot 7$ e quindi abbiamo solo due possibilità:
$a-k=5$ e $a+k=7$ che porta a determinare $k=1$ e quindi $n=-7\pm 6$ che ci da, però, solo soluzioni negative, contro le richieste del problema;
$a-k=1$ e $a+k=35$ che porta a determinare $k=17$ e quindi $n=-7\pm 18$ di cui solo $n=11$ è soluzione accettabile.

15. SOLO TRE CIFRE [841]
Dobbiamo determinare $2021^{2022}\bmod 1000$, che è equivalente a $21^{2022}\bmod 1000$. Sfruttando il Teorema di Eulero, siccome $\varphi(1000)=1000\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=400$ il problema è equivalente a $21^{22}\bmod 1000$ che possiamo anche scrivere $3^{22}\cdot 7^{22}\bmod 1000$. A questo punto possiamo calcolare separatamente le due potenze: $3^{22}\equiv 609\bmod 1000$ e $7^{20}\equiv 49\bmod 1000$.
La risposta richiesta è 841.

16. COPPIE DI INTERI [6]
Prima di tutto osserviamo che essendo sia $4y^2$ che 36 pari, lo dovrà essere anche x^2. Sia $x=2k$.
L'equazione diventa $4k^2-4y^2=36$, cioè $k^2-y^2=9$ che possiamo anche scrivere $(k-y)(k+y)=9$
Siccome 9 ha 3 divisori positivi e 3 negativi, senza nemmeno doverle calcolare, le soluzioni sono in tutto 6.

17. LA GARA DI NUOTO [3]
Se Chiara fosse arrivata seconda, dicendo la verità, una tra Anna e Barbara affermerebbe il vero, visto che almeno una di loro sarebbe o terza o quarta.
Se Chiara fosse arrivata prima, mentendo, sia Anna che Barbara starebbero mentendo.
Se chiara fosse arrivata quarta, mentendo, sia Anna che Barbara affermerebbero il vero.
Resta solo la possibilità che Chiara sia terza in graduatoria.

18. CIFRE VICINE VICINE [4870]
Siano $x_0x_1...x_9$ le nove cifre nella sequenza scelta.
La somma dei numeri di tre cifre che si leggono è
$S=(x_0+x_1+...+x_7)\cdot 100+(x_1+x_2+...+x_8)\cdot 10+(x_2+x_3+...+x_9)$.
Per ottenere il massimo valore di S è necessario le centinaia siano il valore più grande possibile, e quindi x_8 e x_9 siano 0 o 1. Stesso discorso per le decine… e quindi $x_0=2$, $x_8=1$ e $x_9=0$. Analogamente per le unità $x_1=3$.
$$S=\left(\frac{9\cdot 10}{2}-1\right)\cdot 100+\left(\frac{9\cdot 10}{2}-2\right)\cdot 10+\left(\frac{9\cdot 10}{2}-5\right)=4870.$$

19. DIVIDERE IN PARTI NON UGUALI [7984]
Siano a, b, c e d le quattro parti. Il problema chiede che $\frac{a}{2}=3b=c+4=d-5$ e che $a+b+c+d=300$.
Dalle prime uguaglianze, scrivendo tutto in funzione della stessa variabile e sostituendo nella seconda equazione si ottiene il risultato.
Ad esempio, esprimendo tutto in funzione di b si ha: $a=6b$; $c=3b-4$ e $d=3b+5$.
$6b+b+3b-4+3b+5=300$ porta a determinare $b=23$.
La quaterna cercata è $(a;b;c;d)=(138,23,65,74)$.
Il risultato richiesto è $a\cdot b+c\cdot d=7984$

20. IMPOSSIBILE? [0000]

Scriviamo la lista dei numeri da 101 a 200 mettendo prima tutti i pari e poi tutti i dispari: $\left(102;104;106;...;200;101;103;105;...;199\right)$. Ora dividiamo tutti i pari per 2 e lasciamo inalterati i dispari: $\left(51;52;53;...;100;101;103;105;...;199\right)$ Ordiniamo la prima parte della lista in modo da mettere sempre prima tutti i pari e poi i dispari:

$\left(52;54;56;...;100;51;53;...;99;100;101;103;105;...;199\right)$.

Procedendo in questa maniera e riordinando sempre alla fine avrò la lista di tutti i numeri dispari da 1 a 199 .

La somma dei primi 100 numeri dispari vale $100^2 = 10.000$.

La risposta richiesta è 0000.