GARA DI MATEMATICA ON-LINE (30/1/2019)

1. TANTO PER INIZIARE [401]
Siccome il risultato dell'operazione è un multiplo di 5, deve essere 2020, che ha una unità di differenza con 2019. A questo punti ci basta rifare i calcoli al contrario:
$2020:5-3=401$.

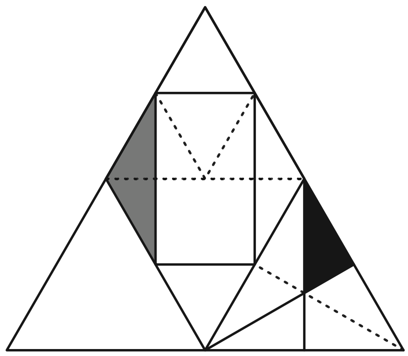
2. CHE FAME! [30]
Se giorgio è sfortunato, si ritroverà con tutti i biscotti al cioccolato e tutti i biscotti ai frutti di bosco. Dovrà prenderne ancora 3 se vorrà soddisfare il suo desiderio.
Il totale è $15+12+3=30$ biscotti.

3. GIUSTO UN CONTO [3]
Prima soluzione
Usando la proprietà distributiva.
$2019\cdot 2017-2020\cdot 2016=2019\cdot 2017-(2019+1)\cdot 2016=2019\cdot 2017-2019\cdot 2016-2016=$
$2019(2017-2016)-2016=2019-2016=3$

Seconda soluzione
Usando l'algebra.
Se $2016=x$, l'espressione diventa
$(x+3)(x+1)-(x+4)x=x^2+x+3x+3-x^2-4x=3$.

4. LA GRANDE BIBLIOTECA [76]
Se nel primo scaffale vi sono x libri, nel secondo ve ne sono $2x$, nel terzo $4x$, nel quarto $8x$ e nel quinto $16x$ per un totale di $x+2x+4x+8x+16x=31x$.
Siccome $31x=589$, $x=19$.
Nel terzo scaffale vi sono $3\cdot 19=57$ libri.

5. QUESTIONE DI AREE [400]
Detta A l'area del triangolo equilatero, e tracciando le linee tratteggiate in figura, si osserva che l'area grigia è $\frac{1}{4}\frac{1}{4}A$ e l'area nera è $\frac{1}{6}\frac{1}{4}A$. Il rapporto tra le due è quindi $\frac{A_{grigia}}{A_{nera}}=\frac{\frac{1}{16}A}{\frac{1}{24}A}=\frac{3}{2}$.



L'area cercata vale $A_{nera}=\frac{2}{3}A_{grigia}=\frac{2}{3}600=400\ \text{cm}^2$.

6. TANTO PER CONTARE [5525]
$1+2+2+3+3+3+4+4+4+4+\ldots+\underbrace{25+25+\ldots+25}_{25\ addendi}=1^2+2^2+3^2+\ldots+25^2$, calcolo che può essere effettuato direttamente, oppure conoscendo la formula per la somma dei primi n quadrati dei numeri naturali: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Nel nostro caso $1^2+2^2+3^2+\ldots+25^2=\frac{25\cdot 26\cdot 51}{6}=5525$.

7. POTENZE [2019]
Siccome $2019 = 3 \cdot 673$, $2019^{2019} = 3^{2019} \cdot 673^{2019}$.
La risposta è proprio $n = 2019$

8. AUMENTI E DIMINUZIONI [138]
Siano x e y i due numeri.
Sappiamo che $xy = 168$ e che $(x+1)(y+1) = 200$.
Svolgiamo i calcoli della seconda equazione:
$xy + x + y + 1 = 200$. Sostituendo l'informazione data dalla prima equazione e facendo i calcoli si ottiene che $x + y = 31$.
Siamo interessati a calcolare il valore di
$(x-1)(y-1) = xy - x - y + 1 = xy - (x + y) + 1 = 168 - 31 + 1 = 138$.
Abbiamo ottenuto il risultato senza nemmeno sapere chi sono x e y che per completezza sono 24 e 7.

9. SOLO TRE CIFRE [9]
Per essere divisibile per 3, la somma delle cifre deve essere un multiplo di 3. Nel nostro caso o le cifre sono tutte uguali (3 possibilità) o sono proprio un "2", un "3" e un "4" (6 possibilità).
In totale vi sono 9 numeri che verificano le condizioni del problema.

10. UNA GRANDE LAVAGNA [487]
Sulla lavagna sono rimasti tutti i multipli di 5 e di 7.
I multipli di 5 vanno da 5 a 2015 e la loro somma vale $5 \cdot (1 + 2 + ... + 403) = 5 \cdot \frac{403 \cdot 404}{2} = 407030$.
I multipli di 7 vanno da 7 a 2016 e la loro somma vale $7 \cdot (1 + 2 + ... + 288) = 7 \cdot \frac{288 \cdot 289}{2} = 291312$.
Nelle due somme abbiamo contato due volte i multipli di 35.
I multipli di 35 vanno da 35 a 1995 e la loro somma vale $35 \cdot (1 + 2 + ... + 57) = 35 \cdot \frac{57 \cdot 58}{2} = 57855$.
La somma richiesta è $407030 + 291312 - 57855 = 640487$.
La soluzione richiesta è 0487.

11. PUNIZIONE MATEMATICA! [9984]
Fissata una cifra in una qualunque posizione, ad esempio "3" nella posizione delle migliaia, le altre cifre possono essere disposte in 6 modi diversi. Siccome questo accade per ogni cifra, il contributo della posizione delle migliaia è pari alla somma delle cifre moltiplicata per 6.
Il risultato è quindi $(3 + 5 + 7 + 9) \cdot 1111 \cdot 6 = 159984$.
La soluzione richiesta è 9984.

12. SCOMMESSE [120]
Se Giuseppe ha dato 4 risposte errate significa che ne ha date 3 esatte.
Se x è il denaro posseduto inizialmente, la somma finale è $\frac{3^3 x}{2^4}$. Siccome questa vale $202{,}5$ €, possiamo calcolare $x = \frac{2^4}{3^3} \cdot 202{,}5 = 120$ €

13. UNA PASSEGGIATA [1320]

Se indichiamo con x la distanza totale da percorrere si può osservare che la distanza $\frac{3}{4}x-\frac{1}{6}x=\frac{7}{12}x$ è stata percorsa in 140 minuti.

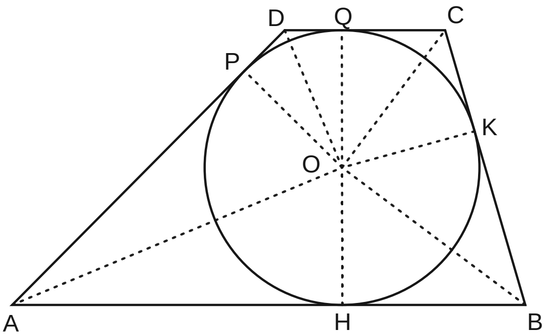
Con una proporzione possiamo scoprire quanto tempo è servito per percorrere $\frac{1}{6}$ del percorso:

$\frac{1}{6}x:t=\frac{7}{12}x:140\text{ min}$, da cui si ricava $t=\dfrac{\frac{1}{6}x\cdot 140\text{ min}}{\frac{7}{12}x}=40\text{ min}$.

Gianni è partito 40 minuti prima delle $14:00$, cioè alle $13:20$.

14. UN TRAPEZIO SPECIALE [588]

Tracciati i raggi nei punti di tangenza, osserviamo che possiamo calcolare tutte le parti in cui sono stati suddivisi i lati con il teorema di Pitagora:



$PD=DQ=\sqrt{65^2-60^2}=25\text{ cm}$;

$QC=CK=\sqrt{75^2-60^2}=45\text{ cm}$;

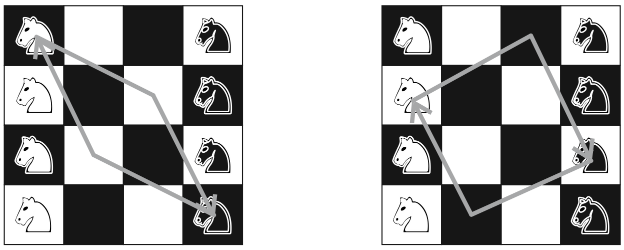
$KB=BH=\sqrt{100^2-60^2}=80\text{ cm}$;

$HA=AP=\sqrt{156^2-60^2}=144\text{ cm}$.

Il perimetro richiesto è $2(25+45+80+144)=588\text{ cm}$.

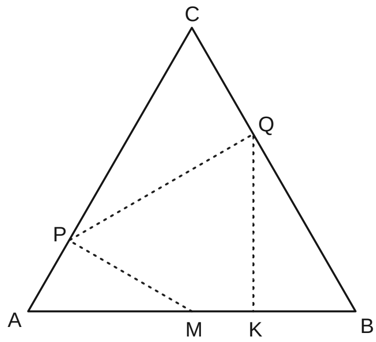
15. SIAMO A CAVALLO [16]

Un cavallo non può raggiungere l'altro schieramento se non facendo almeno due mosse. Se troviamo una strategia che ci permetta di scambiare tra loro due cavalli con 4 mosse, il numero minimo di mosse è 16.
Di seguito sono riportate due strategie possibili per scambiare tra loro i due cavalli che si trovano negli angoli opposti o i due che si trovano nelle caselle centrali.



16. TRIANGOLAZIONI [75]

Eseguendo l'operazione indicata dal problema (come in figura) si osserva che i triangoli AMP, PQC e QKB sono triangoli rettangoli $30°-60°-90°$ e quindi mezzi triangoli equilateri.



Se x è il lato del triangolo, $AM=\frac{x}{2}$ e per quanto osservato $AP=\frac{x}{4}$.

Siccome $PC=x-\frac{1}{4}x=\frac{3}{4}x$, $CQ=\frac{3}{8}x$. $QB=x-\frac{3}{8}x=\frac{5}{8}x$ e quindi $KB=\frac{5}{16}x$.

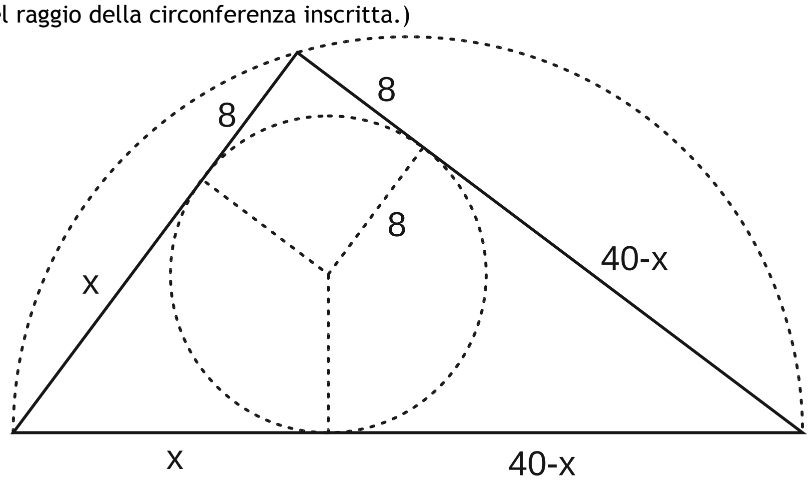
$MK=MB-KB=\frac{1}{2}x-\frac{5}{16}x=\frac{3}{16}x=\frac{3}{16}\cdot 400=75\text{ cm}$.

17. ANAGRAMMI [36]
Dovendo organizzare la parola alternando vocali "V" e consonanti "C" abbiamo due sole possibilità: "VCVCVC" oppure "CVCVCV".
Le consonanti possiamo ordinarle in 3 modi, mentre le vocali in 6 per un totale di $2 \cdot 3 \cdot 6 = 36$ parole possibili.

18. FAME DI FRUTTA [12]
Siano x il numero di mele acquistate e y le arance.
Esprimendo tutto in centesimi, l'equazione di cui dobbiamo trovare una soluzione è $65x + 85y = 880$. Semplifichiamo per 5.
$13x + 17y = 176$.
Riscriviamo questa equazione diofantea nel modo seguente:
$13x = 176 - 17y$. Procediamo per tentativi, aumentando di volta in volta il valore di y a partire da $y = 1$ fino a che non troviamo un multiplo di 13 come risultato di $176 - 17y$.
Dopo qualche tentativo si scopre che per $y = 5$ si ottiene $13x = 91$, cioè $x = 7$.
Sono stati acquistati $5 + 7 = 12$ frutti.

19. TESTA O CROCE [57]
Lanciando 6 monete abbiamo $2^6 = 64$ possibilità.
I casi che non ci vanno bene sono quando otteniamo tutte teste, o tutte croci, oppure quando vi è una sola testa, o una sola croce.
Abbiamo due soli casi in cui la faccia delle moneta è sempre uguale e $6 + 6$ casi in cui vi è una sola testa o una sola croce.
La probabilità cercata è $P = \frac{64 - 14}{64} = \frac{25}{32}$.

20. CIRCONFERENZA DENTRO E FUORI [384]
(N.B. nello scrivere la soluzione di questo esercizio, certamente molto difficile per uno studente di scuola media, si è pensato di non utilizzare la formula del raggio della circonferenza inscritta.)



Il diametro della circonferenza circoscritta coincide con l'ipotenusa del triangolo rettangolo.
Indicata con x una delle due parti in cui l'ipotenusa viene divisa dal raggio della circonferenza inscritta, per il teorema di Pitagora, possiamo scrivere l'equazione $40^2 = (8 + x)^2 + (48 - x)^2$. La soluzione va cercata determinando un possibile valore per x che risolva questa equazione o, sviluppando i calcoli, l'equazione equivalente $x^2 - 20x + 384 = 0$. Con un po' di pazienza, o sfruttando le terne pitagoriche si può determinare che $x = 16$ risolve il problema.
Il triangolo risulta avere i cateti di 24 e $32\ \text{cm}$. La sua area misura $384\ \text{cm}^2$.