GARA DI MATEMATICA ON-LINE (10/10/2018)

1. … GIUSTO UN CONTO [31]

Eseguiamo i calcoli:

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\frac{1}{3}}{\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}+\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}}+\frac{\frac{1}{3}}{\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}+\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}}}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\frac{1}{3}}{\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}}+\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}}}+\frac{\frac{1}{3}}{\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}}+\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}}}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{2}}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{8}+\frac{5}{8}}+\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{8}+\frac{5}{8}}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{4}}+\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{4}}}=$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{15}+\frac{4}{15}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{8}{15}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{15}{8}=\frac{15}{16}.$$

La soluzione richiesta è $15+16=31$.

2. DUE NUMERI [457]

Convertiremo il decimale in frazione: $13,28125=\frac{1328125}{100000}$.

Ora, siccome il numeratore è dispari e il denominatore ha solo 2 e 5 nella sua fattorizzazione, dividiamo entrambi per 5 fino ad ottenere una frazione ridotta ai minimi termini:

$$\frac{1328125}{100000}=\frac{265625}{20000}=\frac{53125}{4000}=\frac{10625}{800}=\frac{2125}{160}=\frac{425}{32}.$$

La soluzione richiesta è $425+32=457$.

3. QUADRATI E RETTANGOLI [45]

La somma dei quadrati costruiti sui due lati del rettangolo vale $\frac{4050}{2}=2025$. Per il Teorema di Pitagora equivale al quadrato costruito sulla diagonale che quindi misura $\sqrt{2025}=45\text{ cm}$.

4. UN MARE DI STELLE [4]

Se coloriamo le stelle dello schema B e sovrapponiamo i due schemi in modo da far combaciare più stelle possibile, si ottiene la figura a lato, dove si vede chiaramente che basta spostare le 4 stelle bianche per ottenere lo schema formato dalle stelle scure.

5. POTENZA DEI NUMERI [265]

Usiamo le proprietà delle potenze:

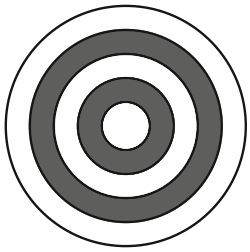
$$\frac{12^{18}}{18^{12}}=\frac{\left(12^{6}\right)^{3}}{\left(18^{4}\right)^{3}}=\left(\frac{2^{12}\cdot3^{6}}{2^{4}\cdot3^{8}}\right)^{3}=\left(\frac{2^{8}}{3^{2}}\right)^{3}=\left(\frac{256}{9}\right)^{3}.$$

La risposta richiesta è $256+9=265$

6. PECORE AL PASCOLO [120]
Scriviamo i numeri triangolari, cioè quei numeri che si ottengono sommando i numeri da 1 fino ad n, maggiori di 20 fino a quando non troviamo un numero che sia di una unità inferiore ad un quadrato perfetto.
$1+2+\ldots+6=21$ (no);
$21+7=28$ (no);
$28+8=36$ (no);
$36+9=45$ (no);
$45+10=55$ (no);
$55+11=66$ (no);
$66+12=78$ (no);
$78+13=91$ (no);
$91+14=105$ (no);
$105+15=120$ che è una unità meno di $121=11^2$.
Le pecore sono 120.

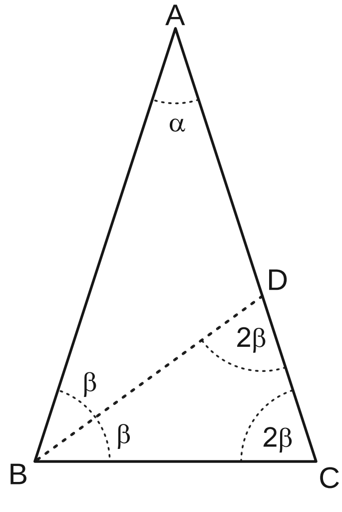
7. NUMERI IN FILA [18]
Affinché la somma di tre numeri consecutivi sia sempre la stessa, deve accadere che il quarto è uguale al primo, il quinto al secondo, il sesto al terzo e così via. Detti a, b e c i primi tre numeri, la sequenza dovrà essere $a-b-c-a-b-c-a-b-c-a-b-c-a$. La somma totale è $5a+4b+4c=200$. Siccome al quarto posto e all'ottavo posto si trovano rispettivamente 12 e 17, $a=12$ e $b=17$. Possiamo calcolare il valore di c risolvendo $5\cdot 12+4\cdot 17+4c=200$ che ci porta a determinare $c=18$.

8. IL BERSAGLIO [40]
L'area totale del bersaglio è 25π, mentre l'area ombreggiata è pari a $\pi\left(4^2-3^2\right)+\pi\left(2^2-1^2\right)=10\pi$.
La percentuale richiesta è $\dfrac{10\pi}{25\pi}\cdot 100=40\%$.



9. CONSECUTIVI [993]
Iniziando con un numero da 1 cifra, possiamo scegliere i valori compresi tra 1 e 4, ma anche 6 e 8 ($6-7-8-9-10$ e $8-9-10-11$ verificano la condizione richiesta). (6 possibilità).
Partendo con un numero da 2 cifre, il primo possibile è 10, mentre l'ultimo è 97 (88 possibilità).
Usando numeri da 3 cifre, come primo numero, possiamo usare un qualunque valore tra 100 e 998 (899 possibilità).
In totale avremo $6+88+899=993$.

10. ANGOLI SPECIALI [36]
Se α è l'angolo al vertice e 2β gli angoli alla base del triangolo ABC, osservando il triangolo BDC si ottiene che $5\beta=180°$, cioè che $\beta=36°$. Segue immediatamente che, essendo $4\beta+\alpha=180°$, anche α misura $36°$.

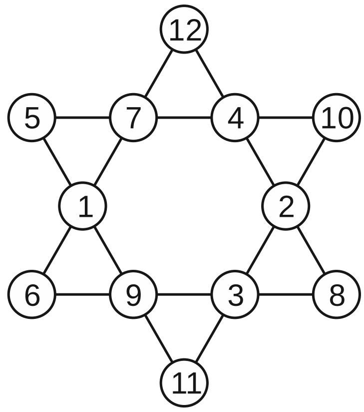


11. UN NUMERO SPECIALE [89]
Traduciamo in equazione le informazioni date dal problema:
$10a+b=a+b^2$, che possiamo anche scrivere $9a=b(b-1)$.
Essendo a e b cifre, l'unica possibilità si ha quando $b=9$ e $a=8$.
Il numero cercato è 89.

12. SONO SOLO NUMERI [45]
Procediamo per casi.
Se la cifra delle unità è 1 vi è una sola possibilità: 101.
Se la cifra delle unità è 2 abbiamo 112 e 202 ($1+1$ e $2+0$).
Se la cifra delle unità è 3 abbiamo 123, 213 e 303 ($1+2$ $2+1$ e $3+0$).
Ogni volta che aumentiamo la cifra delle unità, i casi aumentano di 1.
In totale avremo $1+2+3+...+9=45$ numeri possibili.

13. BASTA UN PO' DI LOGICA [4]
Se un abitante afferma "oggi è sabato", deve necessariamente mentire, visto che se fosse veramente sabato dovrebbe mentire. Oggi deve essere proprio uni di quei giorni in cui gli abitanti mentono, sabato escluso, vista l'affermazione. Restano possibili solo martedì e giovedì.
Il secondo abitante, mentendo, dice che "domani sarà mercoledì" e quindi oggi non può essere martedì. Oggi è sicuramente giovedì.

14. UNA STELLA DI NUMERI [26]
Ogni casella partecipa alle somme due volte. Il valore somma di ogni gruppo di quattro caselle in riga è dato dal doppio della somma dei numeri da 1 a 12 divisa per 6, e cioè $\left(2\cdot\frac{12\cdot 13}{2}\right):6=26$.
Una possibile soluzione è riportata nella figura a lato.

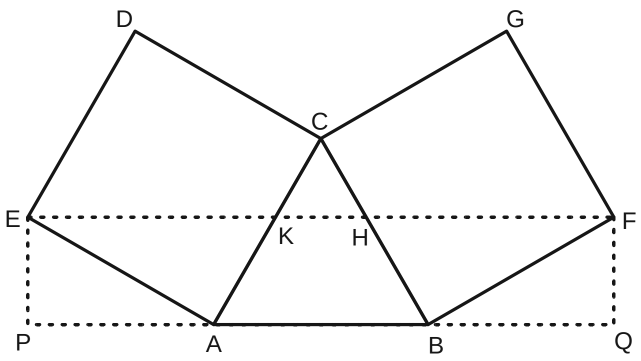


15. TANTE… MA TANTE… CIFRE [5505]
Sommiamo separatamente tutte le cifre che compaiono al posto delle unità, delle decine e delle centinaia.
Per ogni decina, la cifra delle unità comparirà ogni volta diversa. La somma $1+2+3+...+9=45$
Su 500 numeri, vi sono $500:10=50$ decine. la somma di tutte le unità vale $45\cdot 50=2250$.
Per ogni centinaia, la cifra delle decine si ripete uguale per 10 volte. Su 5 centinaia avremo un totale di $5\cdot 45\cdot 10=2250$.
Nel posto delle centinaia avremo cento volte le cifre da 1 a 4, mentre una sola volta la cifra 5.
In totale $100(1+2+3+4)+5=1005$.
Sommando i contributi delle unità, delle decine e delle unità si ottiene $2250+2250+1005=5505$.

16. SEMPRE IL MASSIMO [27]
Detto l il lato del triangolo e del quadrato, il segmento cercato è EF che possiamo proiettare sulla base AB del triangolo. $EF=PQ=2\cdot AP+AB$
Il triangolo EPA è mezzo triangolo di lato l e quindi $AP=\frac{l}{2}\sqrt{3}$.

$PQ=2\cdot AP+AB=2\cdot\frac{l}{2}\sqrt{3}+l=l\left(1+\sqrt{3}\right)$.

Nel nostro caso $PQ=10\left(1+\sqrt{3}\right)\cong 27{,}3\text{ cm}$.



17. IL PRESIDENTE IN RITARDO [7]

Se n sono le persone presenti (ministri compresi), questi si sono dati in tutto $\frac{n(n-1)}{2}$ strette di mano. Il valore n più grande che non supera 178 è $n=19$, infatti $\frac{19\cdot 18}{2}=171$. Le rimanenti $178-171=7$ strette di mano sono quelle che Il presidente ha dato ai ministri presenti.

18. CASELLARIO NUMERICO [3726]

Osserviamo che per verificare le richieste del problema i numeri 4 e 5 possono essere affiancati solo dai soli valori 8 e 1 rispettivamente. La posizione del numero 1 ci costringe a posizionare i numeri nel modo seguente:

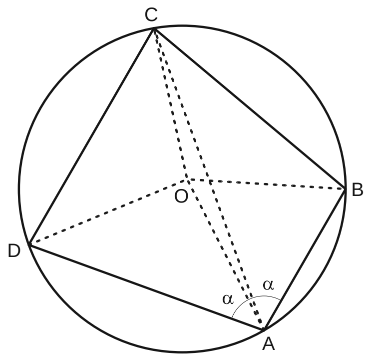
4	8					1	5

Le cifre rimaste posso essere organizzate in un solo modo possibile:

4	8	3	7	2	6	1	5

19. ANGOLI [100]

Unendo i vertici del quadrilatero $ABCD$ con il centro O della circonferenza circoscritta si osserva che ABO risulta essere un triangolo equilatero. Il fatto che AC sia la bisettrice dell'angolo in A implica che $BC=DC$. Ne segue che i triangoli DOC, DOA e BOC sono congruenti. Gli angoli in O misurano tutti $100°$, mentre gli angoli alla base $40°$ ciascuno. In particolare $A\hat{B}C=A\hat{B}O+O\hat{B}C=60°+40°=100°$.



20. CASELLARIO NUMERICO 2 [324]

Scriviamo tutti i numeri di tre cifre che sono anche quadrati:
$100-121-144-169-196-225-256-289-324-361-400-441-484-529-576-625-676-729-784$
$841-900-961$.

Eliminiamo dalla lista tutti i quadrati che hanno due cifre uguali:
$169-196-256-289-324-361-529-576-625-729-784-841-961$.

Tra i numeri rimasti, cerchiamo un quadrato che abbia la cifra delle centinia in comune con un altro quadrato, la cifra delle decine in comune con un altro quadrato e la cifra delle unità in comune con un altro quadrato e che a parte la cifra in comune non abbiano altre cifre uguali.

Con un po' di pazienza si ottiene la soluzione risportata a fianco.

		3	6	1
	5	2	9	
7	8	4		