数学のチーム競技

Gara di matematica a squadre

8 Aprile 2024

SUPE_UNIUD

Istruzioni generali

一 Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare come risposta un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.

二 Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi come risposta la sua parte intera, salvo diversamente indicato.

三 Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000. Se invece la quantità richiesta non è univocamente determinata, si indichi 9999.

四 Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, si diano come risposta le ultime quattro cifre del risultato.

五 I problemi più impegnativi, a nostro giudizio, sono indicati con il simbolo 死, quelli più facili sono indicati da 簡単.

六 Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tenere conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{1} = 1.0000 \quad \sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{10} = 3.1623 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze:

- 10 **minuti dall'inizio**: termine scelta del JOLLY;
- 120 **minuti dall'inizio**: termine della gara.

Dalla mente visionaria del maestro Miyazaki

La Scuola Superiore presenta

Polinomyo sulla varietà algebrica

Il castello errante di Aops

La città interpolata

Il ragazzo e l'Erone

Rombo Rosso

La principessa Mononoide

Il mio vicino To-Toro

Soluzioni dei Problemi

Problemi proposti da: Marzio Bona, Alberto Cagnetta, Matteo Canton, Lorenzo Capponi, Alessandro Minisini, Andrea Perbellini, Eugenio Trovarelli

Gara organizzata da: Alberto Cagnetta, Lorenzo Capponi, Alessandro Minisini, Eugenio Trovarelli

Soluzioni numeriche dei problemi.

Prob. 1	**Prob. 2**	**Prob. 3**	**Prob. 4**	**Prob. 5**	**Prob. 6**	**Prob. 7**
1228	628	21	2960	525	42	216
Prob. 8	**Prob. 9**	**Prob. 10**	**Prob. 11**	**Prob. 12**	**Prob. 13**	**Prob. 14**
114	29	9	42	4950	41	9281
Prob. 15	**Prob. 16**	**Prob. 17**	**Prob. 18**	**Prob. 19**	**Prob. 20**	**Prob. 21**
16	46	4020	1024	314	899	293

---

1 - *I NUMERINI DEL BUIO* 死

"Su, sbrigati" urla Satsuki rivolgendosi a Mei, mentre le due corrono per andare ad aprire la porta sul retro della casa come richiesto dal padre. Tuttavia, appena aprono la porta, compaiono una miriade di piccole e simpatiche creature dette numerini del buio, gli spiritelli della fuliggine che occupano le vecchie case abbandonate! "Sono moltissimi!" esclama sorpresa Mei. "Esattamente tanti quanto la somma dei valori di $a+b+c$ associati a ogni terna ordinata (a,b,c) di interi positivi **pari** minori o uguali a 200 tali che $a^2+2b^2+c^2=abc$" risponde Satsuki. *Quanti sono i numerini del buio?*

*Soluzione (**Risposta:** $\boxed{\mathbf{1228}}$).* Riscriviamo l'equazione come

$$a^2+2b^2+c^2-abc=0. \tag{$*$}$$

L'osservazione chiave è che se (a,b,c) è soluzione di $*$ con a,b,c pari, allora anche $(bc-a,b,c)$, $\left(a,\frac{ac}{2}-b,c\right)$ e $(a,b,ab-c)$ sono soluzioni, ovviamente sempre con a,b,c pari. Questo perché noi possiamo considerare la $*$ come una equazione rispettivamente nelle incognite a,b,c, con parametri rispettivamente $(b,c),(a,c),(a,b)$ e, pertanto se abbiamo una soluzione allora con le formule di Viete possiamo generarne un'altra*. Per verificarlo, consideriamo i polinomi

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= x^2-(bc)x+\left(2b^2+c^2\right)\\
p_2(x) &= 2x^2-(ac)x+\left(a^2+c^2\right)\\
p_3(x) &= x^2-(ab)x+\left(2b^2+a^2\right),
\end{aligned}$$

che si ottengono sostituendo rispettivamente a, b e c con la variabile x in $*$.

- Per le formule di Viète, la somma delle due radici di $p_1(x)$ è bc (l'opposto del coefficiente di primo grado), quindi l'altra radice è $bc-a$: ciò equivale a dire che $(bc-a,b,c)$ è soluzione di $*$.
- Per le formule di Viète, la somma delle due radici di $p_2(x)$ è $\frac{ac}{2}$ (l'opposto del coefficiente di primo grado diviso il coefficiente direttivo), quindi l'altra radice è $\frac{ac}{2}-b$: ciò equivale a dire che $\left(a,\frac{ac}{2}-b,c\right)$ è soluzione di $*$.
- Per le formule di Viète, la somma delle due radici di $p_3(x)$ è ab (l'opposto del coefficiente di primo grado), quindi l'altra radice è $ab-c$: ciò equivale a dire che $(a,b,ab-c)$ è soluzione di $*$.

Ora cerchiamo una soluzione di $*$, dalla quale potremo ricavarne altre grazie alle considerazioni fatte. Un passaggio non essenziale, ma che può aiutare nella ricerca di una soluzione, è il seguente: essendo a,b,c pari, poniamo $a=2a_1$, $b=2b_1$, $c=2c_1$ e sostituiamo in $*$, ottenendo

$$\begin{aligned}
4a_1^2+8b_1^2+4c_1^2-8a_1b_1c_1&=0\\
a_1^2+2b_1^2+c_1^2-2a_1b_1c_1&=0.
\end{aligned}$$

Considerando quest'ultima equazione modulo 2, si verifica facilmente che a_1,b_1,c_1 sono necessariamente tutti pari. Questo significa che a,b,c sono tutti multipli di 4. Poniamo allora $a_1=2a_2$, $b_1=2b_2$, $c_1=2c_2$ e sostituiamo nuovamente:

$$\begin{aligned}
4a_2^2+8b_2^2+4c_2^2-16a_2b_2c_2&=0\\
a_2^2+2b_2^2+c_2^2-4a_2b_2c_2&=0.
\end{aligned}$$

Risulta piuttosto evidente che $(a_2,b_2,c_2)=(1,1,1)$ è una soluzione, il che equivale a dire che $(a,b,c)=(4,4,4)$ è una soluzione di $*$.

A questo punto ricaviamo altre soluzioni sfruttando le considerazioni iniziali e sostituendo a ogni passaggio uno dei numeri della terna. Chiamiamo rispettivamente "mossa 1", "mossa 2" e "mossa 3" le sostituzioni $(a,b,c)\to(bc-a,b,c)$, $(a,b,c)\to\left(a,\frac{ac}{2}-b,c\right)$ e $(a,b,c)\to(a,b,ab-c)$.

*Questa tecnica porta il nome, nell'ambito delle gare di matematica, di *Vieta Jumping*.

- Da $(4,4,4)$ ricaviamo $(12,4,4)$ con la mossa 1, poi $(12,4,44)$ con la mossa 3 e infine $(164,4,44)$ con la mossa 1;
- analogamente ricaviamo $(4,4,12)$, $(44,4,12)$, $(44,4,164)$;
- da $(12,4,4)$ ricaviamo $(12,20,4)$ con la mossa 2, poi $(68,20,4)$ con la mossa 1;
- analogamente ricaviamo $(4,20,12)$ e $(4,20,68)$;
- infine da $(68,20,4)$ ricaviamo $(68,116,4)$ con la mossa 2 e analogamente ricaviamo $(4,116,68)$ da $(4,20,68)$.

Quelle elencate sono tutte le soluzioni con $a,b,c \leq 200$ pari ottenibili a partire da $(4,4,4)$. Resta da verificare che non ne esistono altre: mostreremo in particolare che in generale ogni soluzione di $*$ con a,b,c pari è ottenibile a partire da $(4,4,4)$.
Dimostriamo che se (a,b,c) è soluzione di $*$ con a,b,c pari, allora almeno una tra le mosse 1, 2 e 3 fa diminuire la somma delle tre componenti della terna.
Consideriamo la mossa $(a,b,c) \to \left(a, \frac{ac}{2}-b, c\right)$: se $\frac{ac}{2}-b<b$ abbiamo la tesi, dunque supponiamo $b \leq \frac{ac}{2}-b$, che si può riscrivere come

$$\begin{aligned}
2b &\leq \frac{ac}{2}\\
4b &\leq ac\\
4b^2 &\leq abc\\
4b^2 &\leq a^2+2b^2+c^2\\
2b^2 &\leq a^2+c^2\\
b^2 &\leq \max\{a,c\}^2.
\end{aligned}$$

Senza perdita di generalità, supponiamo $a \leq c$ e supponiamo che la mossa $(a,b,c) \to (a,b,ab-c)$ **non** faccia diminuire la somma delle tre componenti: vale

$$\begin{aligned}
ab-c &\geq c\\
ab &\geq 2c\\
abc &\geq 2c^2\\
a^2+2b^2+c^2 &\geq 2c^2\\
a^2+2b^2 &\geq c^2\\
c^2 &\leq 3\max\{a,b\}^2.
\end{aligned}$$

Ora dobbiamo distinguere due casi.

1. $c \geq b \geq a$. In questo caso abbiamo
$$abc = a^2+2b^2+c^2 \leq \max\{a,b\}^2 + 2\max\{a,b\}^2 + 3\max\{a,b\}^2 = 6b^2,$$
il che implica $ac \leq 6b$ e quindi $a \leq 6$, essendo $c \geq b$. Ricordiamo che in una soluzione ogni componente della terna è divisibile per 4, quindi l'unica possibilità è $a=4$. Ora sostituendo in $*$ otteniamo $b = \frac{c-\sqrt{2c^2-32}}{2}$. Dalla relazione $ab \geq 2c$ ricavata in precedenza, sostituendo $a=4$ segue $2b \geq c$, ossia
$$2c-\sqrt{2c^2-32} \geq c,$$
che equivale a $c \leq \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. Poiché certamente $4 \mid c$, anche qui l'unica possibilità è $c=4$, da cui segue anche $b=4$.

2. $c \geq a \geq b$. In questo caso abbiamo
$$abc = a^2+2b^2+c^2 \leq \max\{a,b\}^2 + 2\max\{a,b\}^2 + 3\max\{a,b\}^2 = 6b^2,$$
il che implica $bc \leq 6a$ e quindi $b \leq 6$, essendo $c \geq a$. Allora $b=4$ in quanto $4 \mid b$, e procedendo in modo analogo rispetto al caso precedente otteniamo anche in questo caso $a=b=c=4$.

Notiamo che non occorre considerare il caso $b \geq c \geq a$ in quanto $b \leq \max\{a,c\}$.
In definitiva, abbiamo verificato che per ogni soluzione (a,b,c) diversa da $(4,4,4)$ esiste una mossa che fa diminuire strettamente la somma delle componenti. Questo è sufficiente per concludere che tutte le soluzioni sono ottenibili a partire da $(4,4,4)$. Infatti, supponiamo per assurdo che una soluzione (a,b,c) non sia ottenibile in questo modo: possiamo

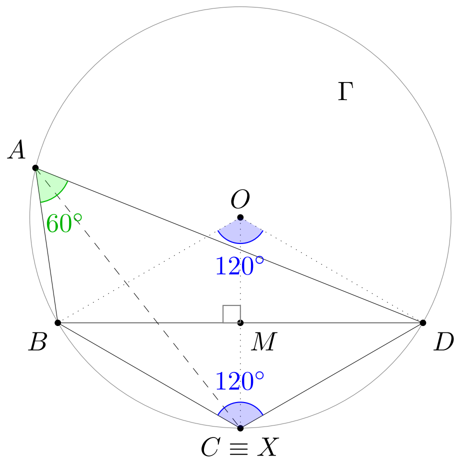
allora continuare indefinitamente a effettuare mosse che facciano diminuire diminuire la somma delle tre componenti della soluzione. Questo è assurdo perché implicherebbe che a un certo punto si effettua una mossa che rende negativa una delle tre componenti della terna, ma è evidente che nessuna terna (a, b, c) con due interi positivi e uno negativo può verificare $a^2 + 2b^2 + c^2 = abc$, in quanto il secondo membro risulterebbe negativo mentre il primo non può esserlo.
Dunque la dimostrazione è conclusa: le soluzioni cercate sono tutte e sole le 13 elencate in precedenza. Effettuando la somma delle tre componenti di ogni terna e sommando tutti i risultati, si ottiene la risposta 1228.

---

2 - *Il Gattobus*

"Ma quando arriva? Sono stanca!" si lamenta Mei, mentre aspetta il padre alla fermata dell'autobus assieme a Satsuki e To-toro. Finalmente, una luce illumina la strada: proviene da uno strano faro a forma di quadrilatero convesso $ABCD$, con $AB = 18$ cm e $AD = 48$ cm, tale che la bisettrice di $\widehat{BAD}$ passa per C, che è il simmetrico del circocentro di ABD rispetto a BD. Subito dopo, Satsuki riesce a vedere il veicolo: si tratta di un gigantesco gatto a 12 zampe! To-toro sale sul Gattobus, che riparte a grande velocità nel bosco. Stupita, Mei riesce solo a chiedere: "*Qual è l'area del faro in cm*^{2}*?*".

Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{\textbf{628}}$). Sia Γ la circonferenza circoscritta ad ABD e sia O il suo centro.



Consideriamo l'intersezione X tra Γ e la bisettrice di $\widehat{BAD}$: poiché $\widehat{BAX} = \widehat{DAX}$ e angoli alla circonferenza congruenti individuano corde congruenti, vale $BX = DX$, ovvero X appartiene all'asse di BD. Ma allora, poiché C appartiene contemporaneamente all'asse di BD (in quanto simmetrico di O rispetto a BD) e alla retta AX, segue che C e X coincidono: in altre parole, C appartiene a Γ e il quadrilatero $ABCD$ è ciclico.
Posto $\widehat{BAD} = \alpha$, vale $\widehat{BOD} = 2\alpha$ poiché $\widehat{BOD}$ e $\widehat{BAD}$ sono rispettivamente angolo al centro e angolo alla circonferenza. Inoltre, $\widehat{BOD} = \widehat{BCD}$ per simmetria. Infine, per la ciclicità di $ABCD$ si ha $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180°$, ovvero $\alpha + 2\alpha = 180°$, da cui $\alpha = 60°$.
Ora calcoliamo l'area di $ABCD$ come somma tra le aree di $\triangle ABD$ e $\triangle BCD$. L'area di $\triangle ABD$ è

$$\frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 48 \cdot \sin 60° = 216\sqrt{3}.$$

Per il teorema del coseno applicato al triangolo $\triangle ABD$, vale

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos \widehat{BAD}} = \sqrt{18^2 + 48^2 - 2 \cdot 18 \cdot 48 \cdot \cos 60°} = 42.$$

Essendo $\widehat{BCM} = 60°$, ricaviamo

$$CM = \frac{BM}{\sqrt{3}} = \frac{BD/2}{\sqrt{3}} = \frac{21}{\sqrt{3}} = 7\sqrt{3}.$$

Infine l'area di $\triangle ACD$ è

$$\frac{1}{2} BD \cdot CM = 21 \cdot 7\sqrt{3} = 147\sqrt{3}.$$

L'area di $ABCD$ è dunque pari a $216\sqrt{3} + 147\sqrt{3} = 363\sqrt{3} \approx 628,7523$. La risposta è 628.

---

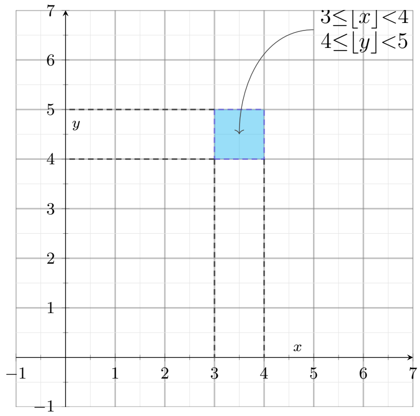
3 - *Un ombrello per To-toro*

"Te lo presto!" dice Satsuki a To-toro porgendogli un ombrello per proteggersi dalla pioggia. Egli stava infatti utilizzando, per ripararsi dal temporale, una semplice foglia: essa ha la forma dell'insieme dei punti a coordinate reali positive (x, y) nel piano cartesiano che verificano la relazione $x + y + 2(\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor) \leq 17$. *Quanto misura l'area della foglia?*

Soluzione (**Risposta:** $\boxed{\textbf{21}}$). Data la presenza della parte intera di x, y reali positivi, poniamo $x = n + q, y = m + r$, con $n = \lfloor x \rfloor, m = \lfloor y \rfloor$ e $0 \leq q, r < 1$, che sono le parti *frazionarie* di x, y rispettivamente. La disequazione considerata diventa $q + r \leq 17 - 3(n + m)$. Visto che $q, r \geq 0$, otteniamo $17 - 3(n + m) \geq 0$, da cui $n + m \leq \frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$ e quindi, essendo n, m interi non negativi, otteniamo $0 \leq x + y + 2(\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor)$.
Adesso, ricordando che $q, r < 1$, notiamo che

$$x + y + 2(\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor) = q + r + 3(n + m) < 1 + 1 + 3 \cdot 5 = 17$$

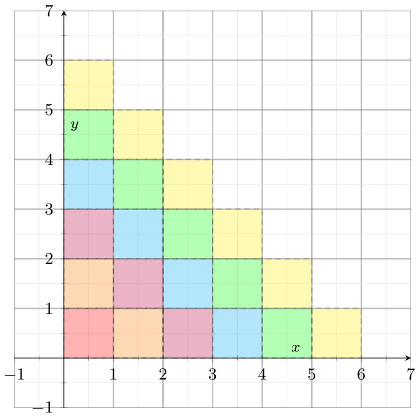
e, quindi, la disuguaglianza è sempre soddisfatta fin tanto che $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor = n + m \leq 5$. Ci rimane da capire quale sia l'insieme dei punti per cui $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq 5$. In generale, se $\lfloor x \rfloor = n, \lfloor y \rfloor = m$ per certi n, m, per definizione, abbiamo che $n \leq n < n+1, m \leq y < m+1$ e quindi il punto di coordinate (x, y) si trova all'interno del quadratino $[n, n+1] \times [m, m+1]$ come si può vedere dalla figura.



Pertanto, se $n + m = k$, con $k = 1, 2, 3, 4, 5$, otteniamo nel piano cartesiano una serie di quadratini di lato 1 con un vertice in comune. Infatti, se, ad esempio, $n + m = 2$, allora $(n, m) = (0, 2), (1, 1), (2, 0)$ che corrispondono ai quadratini

$$[2, 3] \times [0, 1]; \quad [1, 2] \times [1, 2]; \quad [0, 1] \times [2, 3].$$

La situazione, quindi, al variare di $k = n + m = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ è la seguente.



Pertanto il risultato finale non è nient'altro che la somma delle aree dei quadretti considerati, tutti di lato unitario, che sono in numero pari a $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$. Questa è anche la risposta.

---

4 - *Hotel Adriano*

Gina si esibisce all'*Hotel Adriano*, situato su un'isola in mezzo al mare. Ammaliati dalle sue doti canore, giungono sull'isola contrabbandieri da ogni dove, ognuno di essi alla guida del proprio idrovolante. Essendo l'aeroporto molto piccolo, lo spazio per atterrare e decollare è ridotto: gli aerei atterrati si dispongono in fila in ordine di arrivo e ciascuno di essi può decollare per tornare a casa solamente quando tutti quelli arrivati dopo di esso sono già decollati. Inoltre, in una giornata può avvenire solamente o un atterraggio o un decollo. Inizialmente l'aeroporto è vuoto; poi, nell'arco di 56 giorni, atterrano e decollano 28 idrovolanti (numerati da 1 a 28), in maniera tale che alla fine dei 56 giorni l'aeroporto sia di nuovo vuoto. Non tutti sanno che sull'isola sono presenti due registri su cui viene annotato l'ordine di arrivo e l'ordine di partenza dei 28 velivoli. Una volta trascorsi i 56 giorni, il registro degli arrivi presenta scritti i numeri da 1 a 28 in ordine. Invece, nel registro delle partenze, è sicuramente scritto il numero 27, ma gli eventuali numeri scritti prima di esso sono stati erroneamente cancellati. *Quante diverse sequenze di numeri possono essere scritte sul registro delle partenze?*

Soluzione (**Risposta:** $\boxed{\textbf{2960}}$). Per ogni $1 \leq i \leq 28$, sia a_i il numero dell'idrovolante che decolla per i-esimo e consideriamo la sequenza $S = (a_1, a_2, \ldots, a_{28})$. Definiamo *sottosequenza decrescente* ogni sottosequenza $(a_j, a_{j+1}, \ldots, a_{j+h})$ di termini consecutivi di S tale che

- $j = 0$ oppure $a_{j-1} < a_j$;
- $a_j > a_{j+1} > \ldots > a_{j+h}$;
- $j + h = 28$ oppure $a_{j+h} < a_{j+h+1}$.

L'ipotesi che ogni idrovolante non possa decollare prima che siano decollati tutti gli idrovolanti atterrati dopo di lui equivale alla condizione che per ogni sottosequenza decrescente $(a_j, a_{j+1}, \ldots, a_{j+h})$ si abbia $j+h = 28$ oppure $a_{j+h+1} > a_j$. Detto k l'intero positivo tale che $a_k = 27$, la richiesta del problema equivale a determinare tutte le possibili sottosequenze $X = (a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{28})$ di S al variare di S tra le sequenze possibili.
Osserviamo che l'insieme $\{a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{28}\}$ può coincidere con un qualunque sottoinsieme non vuoto dell'insieme $A = \{1, 2, 3, \ldots, 25, 26\} \cup \{28\}$. Una volta scelto un sottoinsieme $B \subseteq A$, se $28 \notin B$ allora l'ordine degli elementi di B nella sequenza X è fissato: per via della condizione sulle sottosequenze decrescenti enunciata in precedenza, l'unica possibilità è che gli elementi di B siano elencati in ordine descrescente in X. Se invece $28 \in B$, notiamo che come nel caso precedente c'è un unico modo di ordinare gli elementi di $B \setminus \{28\}$ (ordine decrescente), mentre 28 può occupare una posizione qualsiasi in X.
Proponiamo due metodi diversi per svolgere il conteggio delle possibili sequenze X.

Metodo 1: distinguiamo tre casi, a seconda della posizione di 28.

1. se $28 \notin B$ ci sono 2^{26} modi di scegliere un sottoinsieme di $A \setminus \{28\}$, a ciascuno dei quali corrisponde una e una sola sequenza X (costituita in ordine da 27 e poi tutti gli elementi del sottoinsieme in ordine decrescente);
2. se $28 \in B$ e $a_{k+1} = 28$ (ossia, ricordando che $a_k = 27$, il 27 e il 28 sono consecutivi in X) anche in questo caso ci sono 2^{26} modi di scegliere un sottoinsieme di $A \setminus \{28\}$, a ciascuno dei quali corrisponde una e una sola sequenza X (costituita in ordine da 27, 28 e poi tutti gli elementi del sottoinsieme in ordine decrescente);
3. se $28 \in B$ e $a_{k+1} \neq 28$ (ossia il 27 e il 28 non sono consecutivi in X), ci sono 26 modi di scegliere il precedente p di 28 in X e poi 2^{25} modi di scegliere un sottoinsieme di $A \setminus \{28, p\}$, a ciascuno dei quali corrisponde una e una sola sequenza X (costituita in ordine da 27 e poi tutti gli elementi del sottoinsieme in ordine decrescente, eccetto il 28 che si trova immediatamente dopo il numero p).

Complessivamente, la sequenza X si può costruire in $2^{26} + 2^{26} + 26 \cdot 2^{25} = 30 \cdot 2^{25}$ modi diversi. Le ultime quattro cifre di tale espressione sono 2960, che è la risposta.

Metodo 2: supponiamo che la sequenza X contenga m elementi, escluso il 27. Distinguiamo due casi:

1. se il numero 28 non è presente in X ci sono $\binom{26}{m}$ modi di scegliere un sottoinsieme di m elementi di $\{1, 2, 3, \ldots, 26\}$, a ciascuno dei quali corrisponde una e una sola sequenza X (costituita in ordine da 27 e poi dai m numeri del sottoinsieme in ordine decrescente);
2. se il numero 28 appartiene alla sequenza X, può trovarsi in $m+1$ posizioni diverse (può essere subito dopo il 27 o può seguire uno qualsiasi degli altri m elementi presenti in X), quindi ci sono $(m+1)\binom{26}{m}$ modi di costruire la sequenza X.

Complessivamente, le possibili sequenze X sono

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{26} \binom{26}{m} + \sum_{m=0}^{26} (m+1)\binom{26}{m} &= \sum_{m=0}^{26} (m+2)\binom{26}{m} = \sum_{m=0}^{26} \left[m\binom{26}{m} + 2\binom{26}{m} \right] \\ &= \sum_{m=0}^{26} m\binom{26}{m} + 2\sum_{m=0}^{26} \binom{26}{m} = 26 \cdot 2^{25} + 2 \cdot 2^{26}.\end{aligned}$$

L'ultimo passaggio segue dall'identità generale $\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} &= \sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!} = n \cdot \sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{n \cdot (n-1)!}{i \cdot (i-1)! \cdot (n-i)!} \\ &= n \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(i-1)! \cdot (n-i)!} \overset{j=i-1}{=} n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j! \cdot ((n-1)-j)!} = n \cdot 2^{n-1}.\end{aligned}$$

5 - *o-piccolo S.p.A.* 簡単

Dopo aver danneggiato l'aereo in uno scontro, Rombo Rosso decide di recarsi a Milano per farlo riparare e montare un nuovo motore V12 "Folgore". Una volta giunto a destinazione, sceglie di affidare la manutenzione alla o-piccolo S.p.A., azienda in cui lavorano 7 operaie. Se tutte e 7 le operaie lavorassero insieme, impiegherebbero 5 ore a completare il lavoro. Ciascuna di loro, lavorando singolarmente, ci impiegherebbe invece al massimo 70 ore. *Quanti minuti, come minimo, ci metterebbe l'operaia più veloce a completare la manutenzione?*

Soluzione (**Risposta:** $\boxed{525}$). Per trovare il tempo minimo in cui un'operaia può completare la manutenzione, dovrà accadere che le altre 6 operaie dovranno essere più lente possibile. Dunque, le altre 6 operaie dovranno impiegare 70 ore ciascuna per completare il lavoro.
Dunque, chiamando x il tempo in ore in cui l'operaia più veloce completa il lavoro, possiamo ricavare l'equazione

$$6 \cdot \frac{1}{70} + \frac{1}{x} = \frac{1}{5},$$

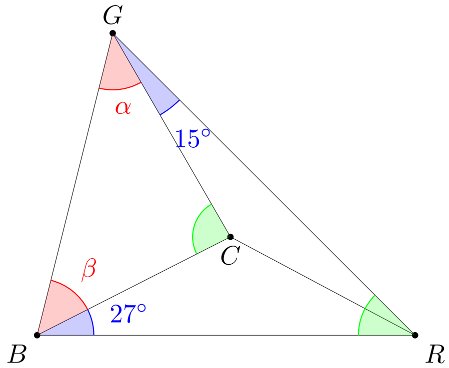
la cui soluzione è $x = \frac{35}{4}$ ore, ovvero $60 \cdot \frac{35}{4} = 525$ minuti, che è la risposta al problema.

---

6 - *Rientro in avvitamento* 簡単

Il duello tra Rombo Rosso e Curtis richiama una vasta folla ed è senza esclusione di colpi! Tra la folla sono presenti Gina (G) e il boss di Mamma Aiuto (B), che con un binocolo osservano gli idrovolanti di Rombo Rosso (R) e Curtis (C) sorvolare le loro teste. A un certo punto, i due aerei volano a pelo d'acqua, per cui G, B, C e R si trovano sullo stesso piano, con C che si trova all'interno del triangolo GBR. Gina esclama: "*Io vedo i due aerei sotto un angolo di* $15°$". Il boss risponde: "*Io invece li vedo sotto un angolo di* $27°$...". Neanche il tempo di finire la frase che Rombo Rosso esegue perfettamente un rientro in avvitamento, la mossa con cui è diventato l'asso dell'Adriatico! *Quanto vale* $\widehat{GCB} - \widehat{GRB}$*?*

Soluzione (**Risposta:** $\boxed{42}$). Osserviamo la figura.



Siano α e β le misure rispettivamente di $\widehat{BGC}$ e $\widehat{CBG}$. Sappiamo che $\widehat{CGR} = 15°$ e $\widehat{RBC} = 27°$. Per calcolare $\widehat{GCB} - \widehat{GRB}$ notiamo che

$$\widehat{GCB} = 180° - \left(\widehat{BGC} + \widehat{CBG}\right) = 180° - (\alpha + \beta)$$

e che

$$\widehat{GRB} = 180° - \left(\widehat{BGR} + \widehat{RBG}\right) = 180° - (15° + \alpha + 27° + \beta) = 180° - (42° + \alpha + \beta)\,.$$

Dunque, possiamo ricavare che

$$\widehat{GCB} - \widehat{GRB} = 180° - (\alpha + \beta) - [180° - (42° + \alpha + \beta)] = 42°,$$

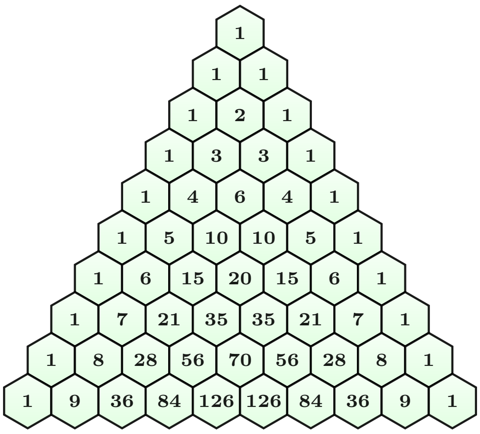
che è la risposta al problema.

---

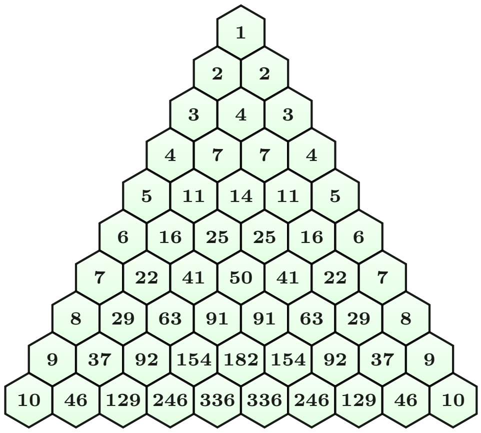
7 - *Il Dio della Foresta*

Gravemente ferito, Asciitaka decide di partire alla ricerca del Dio della Foresta. Una volta addentratosi nella foresta, popolata dai kodama, si accorge che la disposizione dei 101^2 alberi presenti è molto particolare: essi sono infatti disposti a formare una griglia quadrata 101×101 orientata secondo i punti cardinali. Anche l'altezza degli alberi segue un criterio singolare. In particolare, l'albero posizionato nell'angolo a nord-ovest della foresta è alto 1 metro. Poi, ciascun albero della riga più a nord è alto un metro in più di quello immediatamente a ovest e ciascun albero della colonna più a ovest è alto un metro in più di quello immediatamente a nord. Ciascun altro albero, invece, è alto tanto quanto la somma dei due alberi immediatamente a nord e ovest di esso. *Quanti metri è alto l'albero più alto della foresta?*
[Dare come risposta la somma dei quattro numeri primi più grandi ***di due cifre*** *che dividono il risultato.]*

Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{216}$). Ci si accorge facilmente che la regola descritta per l'altezza degli alberi della foresta ricorda la regola per la creazione del *triangolo di Tartaglia*, i cui elementi sono descritti dai coefficienti binomiali $\binom{n}{m}$, per l'm-esimo termine dell'n-esima riga.
Mossi da questa analogia, anziché considerare la foresta come un quadrato, guardiamola "ruotata", mettendo in alto il primo albero e sotto gli altri alberi, come faremmo per il triangolo di Tartaglia, ottenendo la situazione seguente:

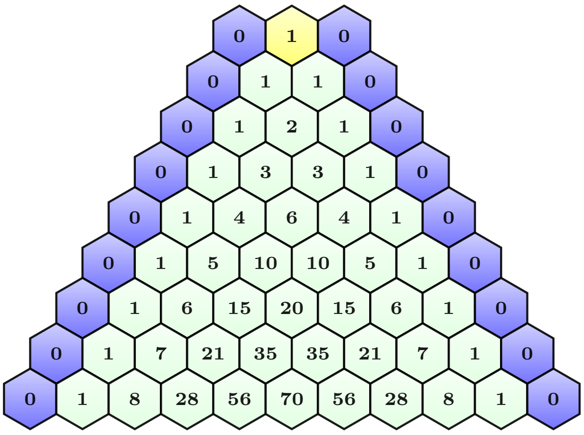


Il triangolo di Tartaglia usuale



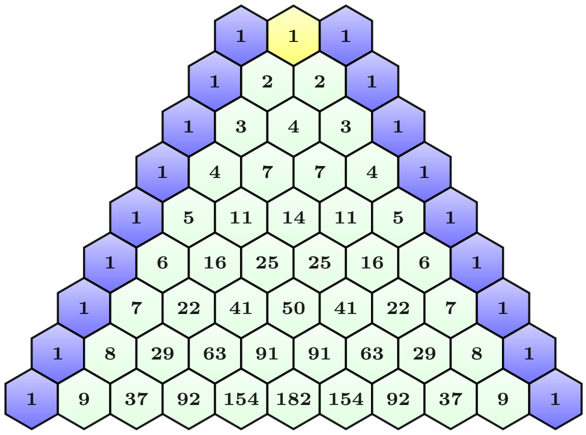
La situazione attuale

Notiamo che, in entrambi i casi, a partire dalla terza riga, ciascun termine è pari alla somma dei due sovrastanti.
Come già detto, nell'usuale triangolo di Tartaglia, ogni termine è fornito dal coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$, per il termine k-esimo nella riga n-esima, con $0 \leq k \leq n$. Vogliamo identificare una formula analoga che ci fornisca il termine k-esimo della riga n nel nostro triangolo.
Per identificare tale formula, ricordiamo un modo alternativo di vedere il triangolo di Tartaglia usuale, in modo tale che ogni termine del triangolo di Tartaglia si possa calcolare con la definizione data, già a partire dalla seconda riga. A tal fine, aggiungiamo delle righe di zeri ai bordi del triangolo di tartaglia normale, e notiamo che, a questo punto, effettivamente ogni termine del triangolo di Tartaglia, a parte il vertice in alto, si può ottenere dalla somma dei due termini sovrastanti.



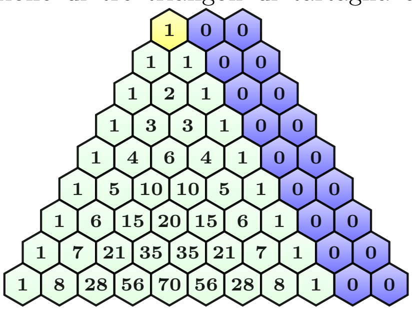
Il triangolo di Tartaglia esteso

Con questa stessa idea, possiamo ora riprodurre il triangolo iniziale, estendendolo ai bordi con una fila di 1, anziché di zeri.

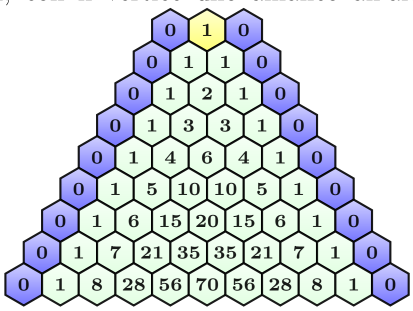


Il triangolo della Foresta esteso

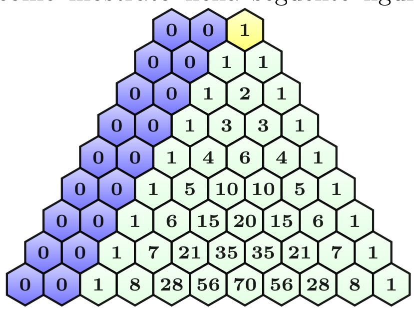
Questa rappresentazione, allora, mette in evidenza che il triangolo considerato non è nient'altro che una sovrapposizione di tre triangoli di tartaglia usuali, con il vertice uno affianco all'altro, come mostrato nella seguente figura.



Primo triangolo di Tartaglia



Secondo triangolo di Tartaglia



Terzo triangolo di Tartaglia

Vedendo il triangolo iniziale come sovrapposizione di tre triangoli di Tartaglia standard, otteniamo facilmente che il termine k-esimo della riga n-esima è dato da

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

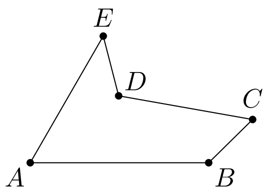
E' chiaro che il termine maggiore cercato, ossia "l'albero più alto della foresta", è il termine centrale dell'ultima diagonale possibile della foresta, ossia dobbiamo prendere, nella riga $n = 2 \cdot 100$ (si parte dalla riga 0 e ne abbiamo 101), il termine per $k = 100$. Se $n = 2k$, come in questo caso, abbiamo che

$$\begin{aligned}\binom{2k}{k-1} + \binom{2k}{k} + \binom{2k}{k+1} &= \frac{(2k)!}{(k-1)!(k+1)!} + \frac{(2k)!}{k!k!} + \frac{(2k)!}{(k-1)!(k+1)!} \\ &= \frac{(2k)!}{k!(k-1)!}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right) \\ &= k \cdot \binom{2k}{k} \cdot \frac{3k+1}{k(k+1)} = \frac{3k+1}{k+1}\binom{2k}{k}.\end{aligned}$$

Pertanto vogliamo calcolare i quattro numeri primi di due cifre più grandi di $\frac{301}{101}\binom{200}{100}$. Visto che 101 è primo ed è maggiore di 100 ci basta trovare i numeri primi di $301 \cdot \binom{200}{100} = 7 \cdot 43 \cdot \frac{200 \cdot 199 \cdots 101}{100!}$. Notiamo che, ogni primo di due cifre maggiore di 50 appare al più una volta a denominatore, mentre appare più volte a numeratore se e solo se il suo triplo è minore di 200, ossia se $3p < 200$, da cui $p \leq 66$. Se $66 < p < 100$, appare una volta sia a numeratore che denominatore e quindi non appare complessivamente nel risultato. Pertanto i primi $53, 59, 61$ ci sono sicuramente. Il numero primo maggiore di due cifre rimanente è 47, che però appare due volte sia a numeratore che denominatore. Pertanto il quarto primo cercato è 43, in quanto 301 è divisibile per 43. La risposta è allora $43 + 53 + 59 + 61 = 216$.

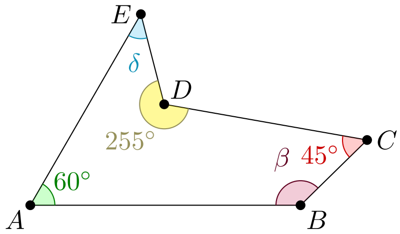
---

8 - La Principessa Spettro



"É apparsa, è la Principessa Spettro!" urlano a gran voce gli abitanti della città del Ferro. La Principessa Mononoide è infatti comparsa sul tetto di una casa, col volto coperto da una maschera da lei costruita. Essa ha la forma di pentagono concavo $ABCDE$, il cui unico angolo interno maggiore di $180°$ è $\widehat{CDE}$, che misura $255°$. Inoltre, vale che $BC = DE$, l'angolo $\widehat{BCD} = 45°$, l'angolo $\widehat{BAE} = 60°$, $AB + AE = 31$ cm e $CD = 13$ cm. La principessa è così concentrata a calcolare l'area della sua maschera (in cm^2) che non sente Asciitaca gridare in lontananza: "Fermati, è un trappola, anche ritirarsi è coraggio!". *Che numero ha calcolato?*

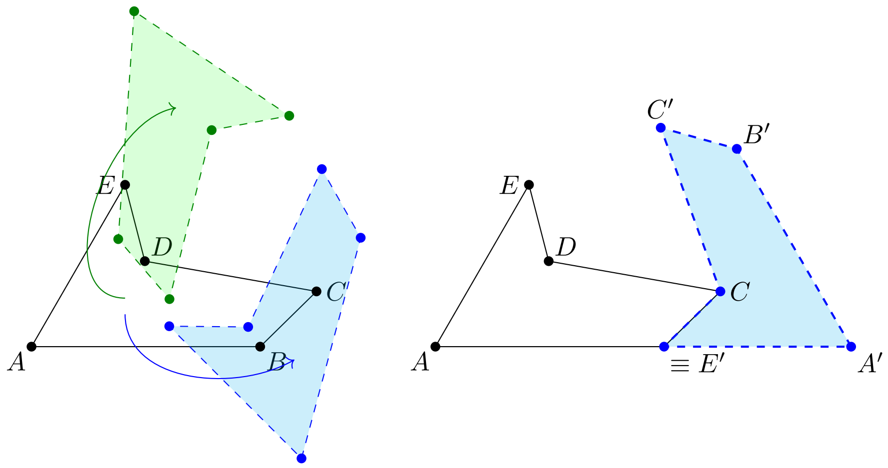
Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{114}$). Consideriamo la situazione considerata, più nel dettaglio.



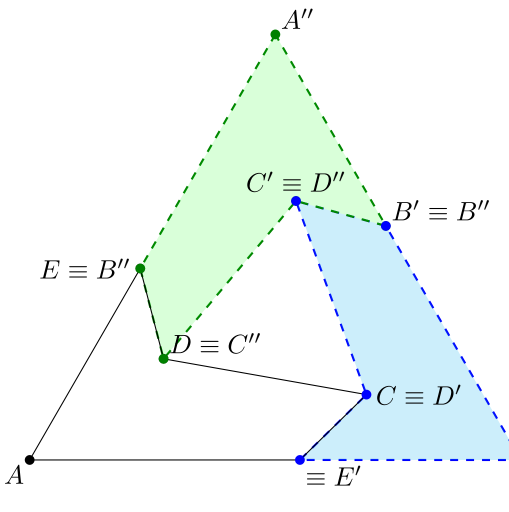
Notiamo che la figura considerata si può vedere come la somma dei triangoli $\triangle ADE$, $\triangle ABD$, $\triangle BCD$ e quindi la somma dei suoi angoli interi è $180° \cdot 3 = 540°$. Ciò permette di concludere che $\delta + \beta = 540 - 60 - 255 - 45 = 180°$. Questa osservazione, così come il fatto che

1. venga data per ipotesi solo la somma dei lati $AE + AB$;
2. la forma molto particolare della figura;

dovrebbe indicare che, in realtà, questa figura può essere vista come un "pezzo" di una figura più regolare, che potrebbe aiutare a risolvere il problema. Notiamo che, per ipotesi, $BC = DE$ e, pertanto, se "spostassimo" la figura facendo combaciare il segmento DE con il segmento BC, non solo questi due segmenti si sovrapporrebbero perfettamente ma il alto $E'A'$ (ossia il segmento ottenuto dallo spostamento di EA) sarebbe allineato ad AB, visto che δ e β sono supplementari. Quindi possiamo fare le due operazioni indicate nella figura qui sotto a sinistra, ottenendo alla fine, ad esempio, la situazione indicata nella figura qui sotto a destra,



Come si può vedere, visto che l'angolo $\widehat{BAE} = 60°$, sembra che la figura iniziale sia parte di un triangolo equilatero di lato di base $AB + E'A' = 31$, con un buco al centro. Il particolare, notiamo che $\widehat{DCC'} = 360° - \widehat{DCB} - \widehat{BCC'} = 360° - 45° - 255° = 60°$ e quindi il "buco" al centro sarà un triangolo equilatero ($DC = CC'$). In effetti, spostando una ulteriore copia (indicata in verde) del pentagono iniziale in alto, si ricompone la figura iniziale, ottenendo la seguente situazione.



A questo punto, è chiaro che la risposta la problema iniziale non è nient'altro che 1/3 della differenza tra le aree di $\triangle AA'A''$ e $\triangle CC'C''$ e, per costruzione, entrambi i triangoli $\triangle AA'A''$ e $\triangle CC'C''$ sono equilateri. I loro lati sono, per ipotesi, 31 e 13 e quindi la risposta è pari a

$$\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 31^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 13^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{12}(31-13)(31+13) = 66\sqrt{3} \approx 114,3186\dots$$

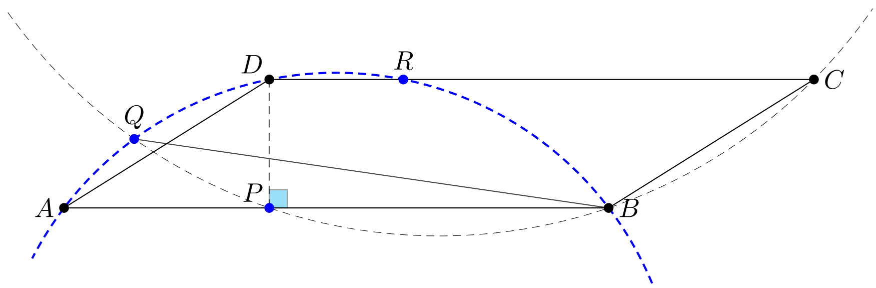
e quindi la risposta è 114.
P.S.: l'angolo $\widehat{BCD}$, di 45°, indica quanto è ruotato il triangolo centrale rispetto al triangolo equilatero esterno, in questo caso la rotazione è di $45° - 30° = 15°$.

---

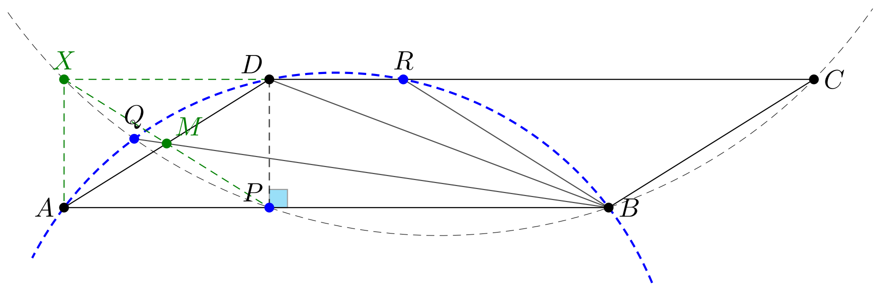
9 - Il clan dei cinghiali 死

Nella foresta arriva il clan dei cinghiali che, stanco dei soprusi umani, ha deciso di attaccarli. Lo schieramento sarà a forma di parallelogramma $ABCD$ con $\widehat{DAB}$ acuto, $AB = 18$ m e $BC = 8$ m. Inoltre, saranno tre le posizioni strategiche: P, che è la proiezione di D su AB; Q, che è l'intersezione tra le circonferenze circoscritte ai triangoli PBC e ADB; R, che è l'intersezione diversa da D tra la circonferenza circoscritta ad ADB e il segmento DC. Proprio nel punto R si troverà Okkoto, capo del clan. *Quanti metri disterà Okkoto dal punto D, sapendo che $BQ = 17$ m?*
[Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.]

Soluzione (**Risposta:** $\boxed{29}$). La situazione è la seguente.



Per procedere, consideriamo il prolungamento dalla parte di D di CD, sia Γ la circonferenza circoscritta a CPB e sia X l'ulteriore intersezione tra CD e Γ. Sia inoltre $M = PX \cap AD$. La situazione è la seguente ora.



Innanzitutto, notiamo che il quadrilatero $XPBC$ è un trapezio isoscele, in quanto CX e PB sono paralleli. Inoltre, notiamo che $DX = (CX - PB)/2$, tuttavia $DC = AB = PB + AP$ e quindi l'unica possibilità, per simmetria del trapezio isoscele, è che $CX = 2AP + PB$ e pertanto $DX = AP$. Visto che $APDX$ ha due lati paralleli e congruenti, è un parallelogramma.
Visto che l'angolo in P è retto, $APDX$ è un rettangolo e, in particolare, M è il punto medio di AD. Ma allora, abbiamo banalmente che $DM \cdot MA = XM \cdot MP$ (e in realtà $MD = MA = MP = MX$) e $DM \cdot MA$ è la potenza di M rispetto alla circonferenza circoscritta ad ABD, mentre $MX \cdot MP$ è la potenza di P rispetto alla circonferenza circoscritta a $PBCX$.
Poiché M ha la stessa potenza rispetto a queste due circonferenze, deve stare sul loro asse radicale, che per definizione è QB, ossia $M \in QB$.

Ora possiamo concludere il problema.
Sappiamo che $AD = BC = 8$ e quindi $MD = MA = 4$. Visto che $QM \cdot MB = MD \cdot MA = 16$ per il teorema delle corde, posto $MB = x$ e ricordando $BQ = 17$, otteniamo $x(17 - x) = 16$, ossia $x^2 - 17x + 16 = 0$, che ha per soluzione $x = 1$ o $x = 16$. Visto che AMB deve essere un triangolo e $AM = 4, AB = 18$, l'unica possibilità affinché $AM + MB > AB$ è che $MB = x = 16$.
Per calcolare DR, notiamo che $ABRD$ è anch'esso un trapezio isoscele, in quanto è un quadrilatero ciclico per costruzione e AB e DR sono paralleli. Inoltre, per simmetria, $DB = RA, AD = RB$ e, quindi, per il teorema di Tolomeo, si ottiene

$$AD \cdot RB + DR \cdot AB = DB \cdot RA = DB^2$$

ossia $DR = \frac{DB^2-AD^2}{AB}$. Avendo AD e AB, ci rimane da calcolare DB^2.
Consideriamo il triangolo ADB. Allora conosciamo AD, AB e la lunghezza della mediana BM e vogliamo calcolare il terzo lato. Questo è un problema classico e si può risolvere o utilizzando il teorema della mediana o usando il *teorema di Stewart*[†], oppure tramite il teorema dei coseni. Noi mostriamo quest'ultimo metodo.
Notiamo che $\widehat{AMB} + \widehat{BMD} = 180°$ e pertanto $\cos\widehat{AMB} = -\cos\widehat{BMD}$. Per il teorema del coseno applicato ai triangoli AMB e BMD, otteniamo

$$\cos\widehat{AMB} = \frac{AM^2+MB^2-AB^2}{2AM\cdot MB}, \qquad \cos\widehat{BMD} = \frac{DM^2+MB^2-DB^2}{2DM\cdot MB}.$$

Posto $DB = y$, sostituendo $AM = DM = 4, AB = 18, BM = 16$ e utilizzando la relazione tra i coseni precedentemente ottenuta, abbiamo che

$$\frac{4^2+16^2-18^2}{2\cdot 4\cdot 16} = -\frac{4^2+16^2-y^2}{2\cdot 4\cdot 16}$$

che porta a

$$DB^2 = y^2 = 2(4^2+16^2) - 18^2 = 220.$$

Allora $DR = \frac{DB^2-AD^2}{AB} = \frac{220-64}{18} = \frac{26}{3}$, e la risposta al problema è 29.

---

10 - *Senza-Volto* 簡単

Sen - questo è il nuovo nome di Chihiro - si ritrova costretta a lavorare al magico complesso termale gestito dalla potente strega Yubaba. Durante il primo giorno di lavoro di Sen, gli ospiti del complesso termale sono in tutto n, con n tale che la somma delle sue cifre sia 2024. Tuttavia, Sen decide incautamente di far entrare nello stabilimento anche una misteriosa creatura mascherata, rendendo quindi gli ospiti del complesso $n+1$. *Quanto vale al minimo la somma delle cifre di $n+1$?*

Soluzione (**Risposta:** $\boxed{9}$). Poiché ogni intero positivo è congruo modulo 9 alla somma $s(n)$ delle sue cifre, vale che

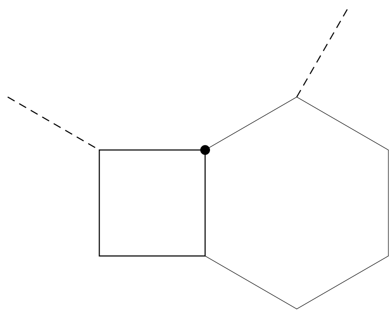
$$n \equiv s(n) \equiv 2024 \equiv 8 \pmod 9.$$

Di conseguenza, $s(n+1) \equiv 8+1 \equiv 0 \pmod 9$, da cui segue $s(n+1) \geq 9$. D'altra parte, è possibile ottenere $s(n+1) = 9$ con $n = 8\underbrace{999\ldots999}_{224 \text{ cifre } 9}$, quindi la risposta è proprio 9.

---

11 - *Le terme di Yubaba*

"Lagnati e ti faccio diventare carbone!": con queste parole Yubaba ammonisce Sen, alla quale ha appena assegnato il suo primo lavoro. Sen accompagna quindi l'ospite verso una stanza dove si trovano tre vasche: esse hanno la forma di poligoni regolari con i lati della stessa lunghezza e non necessariamente distinti, posizionati in maniera tale che i tre poligoni abbiano un vertice in comune e che ogni poligono abbia un lato in comune con ciascuno degli altri due, come mostrato nell'esempio in figura, in cui sono accostati un quadrato, un esagono e un dodecagono. Le tre vasche delle terme di Yubaba sono tali per cui la vasca con più lati abbia la maggior quantità di lati possibili. *Quanti lati ha tale vasca?*



Soluzione (**Risposta:** $\boxed{42}$). Siano a, b, c i rispettivi numeri di lati dei tre poligoni utilizzati. Per un generico n-gono, la somma degli angoli interni è $(n-2)\cdot 180°$, quindi ogni angolo misura $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$. Le ipotesi si traducono quindi nell'equazione diofantea

$$\begin{aligned}
\frac{(a-2)\cdot 180°}{a} + \frac{(b-2)\cdot 180°}{b} + \frac{(c-2)\cdot 180°}{c} &= 360° \\
bc(a-2) + ac(b-2) + ab(c-2) &= 2abc \\
3abc - 2(ab+bc+ca) &= 2abc \\
2(ab+bc+ca) &= abc \\
\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Osserviamo che almeno uno tra a, b, c deve essere minore o uguale a 6, poiché $\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7} < \frac{1}{2}$. Senza perdita di generalità, supponiamo $3 \leq a \leq 6$, $b \leq c$ e distinguiamo quattro casi.

[†]Questi risultati si trovano ad esempio nei libri di geometria della colonna UMath e nelle Schede Olimpiche di M. Paolini. Il primo risultato afferma che, se ABC è un triangolo e $AB = c, AC = b, BC = a$ e m_a è la mediana uscente da A, allora $2m_a^2 = b^2 + c^2 - a^2/2$.

- Poniamo $a = 3$ nell'equazione $2ab + 2bc + 2ca = abc$, che si può riscrivere come $2ab + 2ac + (2 - a)bc = 0$:

$$\begin{aligned} 6b + 6c - bc &= 0 \\ 6b + 6c - bc - 36 &= -36 \\ (b-6)(-c+6) &= -36 \\ (b-6)(c-6) &= 36. \end{aligned}$$

  Il massimo valore possibile per c si ottiene con $b - 6 = 1$ e $c - 6 = 36$, ossia $c = 42$.

- Poniamo $a = 4$ e procediamo in modo analogo al caso precedente:

$$\begin{aligned} 8b + 8c - 2bc &= 0 \\ 4b + 4c - bc &= 0 \\ 4b + 4c - bc - 16 &= -16 \\ (b-4)(-c+4) &= -16 \\ (b-4)(c-4) &= 16. \end{aligned}$$

  Il massimo valore possibile per c si ottiene con $b - 4 = 1$ e $b - 4 = 16$, ossia $c = 20$.

- Poniamo $a = 5$ e procediamo in modo analogo ai casi precedenti:

$$\begin{aligned} 10b + 10c - 3bc &= 0 \\ 30b + 30c - 9bc &= 0 \\ 30b + 30c - 9bc - 100 &= -100 \\ (3b-10)(-3c+10) &= 100 \\ (3b-10)(3c-10) &= 100. \end{aligned}$$

  Poiché l'equazione $3b - 10 = 1$ non ha soluzione intera, il massimo valore possibile per c si ottiene con $3b - 10 = 2$ e $3c - 10 = 50$, ossia $c = 20$.

- Poniamo $a = 6$ e procediamo in modo analogo ai casi precedenti:

$$\begin{aligned} 12b + 12c - 4bc &= 0 \\ 3b + 3c - bc &= 0 \\ 3b + 3c - bc - 9 &= -9 \\ (b-3)(-c+3) &= -9 \\ (b-3)(c-3) &= 9. \end{aligned}$$

  Il massimo valore possibile per c si ottiene con $b - 3 = 1$ e $c - 3 = 9$, ossia $c = 12$.

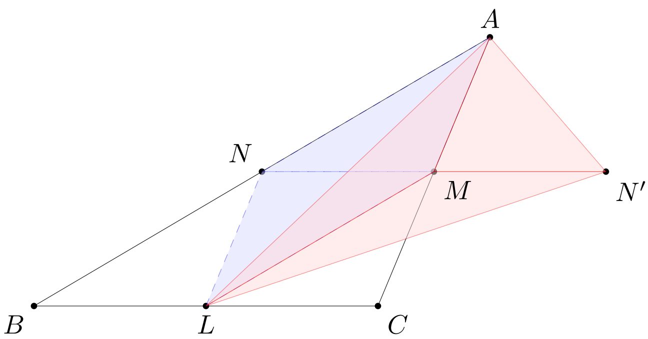
In definitiva, il più grande poligono che si può utilizzare è quello con 42 lati.

---

12 - ***Il treno*** 簡単

Sen deve prendere il treno per raggiungere la stazione di Fondo dello Stagno e raggiungere la maga Zeniba. Le stazioni sono in totale sette: quelle principali sono A, B e C, che formano un triangolo di lati $AB = 20$ km, $BC = 13$ km e $CA = 11$ km. Ci sono poi altre tre stazioni L, M e N posizionate nei punti medi di BC, CA e AB. Infine, la stazione di Fondo dello Stagno è posizionata nel punto N', simmetrico di N rispetto a M. *Quanto vale l'area del triangolo formato dalle stazioni A, L e N', misurata in ettometri quadrati?*

Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{\textbf{4950}}$). Facciamo riferimento alla figura sottostante.



Indichiamo con $[XYZ]$ l'area di un generico triangolo $\triangle XYZ$. $\triangle ANM$ e $\triangle ABC$ sono simili con rapporto di similitudine $1/2$, quindi $[ANM] = [ABC]/4$. Osserviamo che

$$[ALN'] = [ALM] + [MLN'] + [AMN'].$$

Valgono:

- $[AMN'] = [ANM]$ poiché $MN' = NM$ e le relative altezze coincidono;
- $[AML] = [ANM]$ poiché entrambi hanno base AM e le relative altezze coincidono;
- $[MLN'] = [NLM]$ poiché $NM = MN'$ e le relative altezze coincidono, inoltre $[NLM] = [ANM]$ in quanto $ANLM$ è un parallelogramma.

In definitiva,

$$[ALN'] = [ALM] + [MLN'] + [AMN'] = 3[AMN] = \frac{3}{4}[ABC].$$

L'area di $\triangle ABC$ (in centimetri quadrati) si può calcolare con la formula di Erone:

$$[ABC] = \sqrt{22(22-20)(22-13)(22-11)} = 66.$$

La risposta è $\frac{3}{4} \cdot 6600 = 4950$.

$\boxed{13}$ - *Testa di Rapa* 簡単

Dopo essere stata trasformata in un'anziana donna, Sophie scappa di casa e si incammina verso le Lambde Desolate. Durante il tragitto, incontra un magico spaventapasseri che soprannomina Testa di Rapa. "Se potessi portarmi una casa dove passare la notte non andrebbe male!" esclama Sophie rivolgendosi allo spaventapasseri. Quest'ultimo, come riposta, inizia a saltellare in una direzione: compie un primo salto lungo 3 metri, un secondo lungo 21 metri e, dal terzo salto in poi, ogni salto è lungo quanto la somma delle lunghezze di tutti i salti precedenti! Non passa molto tempo che all'orizzonte compare il misterioso castello di Aops. Una volta entrata, Sophie incontra il demone del fuoco Calcifer, che le domanda prontamente: "*Detta a_i la lunghezza dell'i-esimo salto di Testa di Rapa, quanto vale $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i}$?*".
[Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.]

Soluzione (**Risposta:** $\boxed{41}$). Proviamo a ricavare i primi termini della successione: $a_1 = 3$, $a_2 = 21$, $a_3 = 24$, $a_4 = 48$, $a_5 = 96$... Già con pochi termini, non è difficile accorgersi che $a_i = 2 \cdot a_{i-1}$ per $i \geq 4$. Infatti, per induzione si verifica facilmente che per ogni $i \geq 4$ vale

$$a_i = a_{i-1} + \underbrace{a_{i-2} + \cdots + a_1}_{=a_{i-1}} = 2 \cdot a_{i-1}.$$

Dunque, il valore da calcolare è

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{21} + \frac{1}{24} + \frac{1}{2 \cdot 24} + \frac{1}{2^2 \cdot 24} + \frac{1}{2^3 \cdot 24} + \cdots = \frac{1}{3} + \frac{1}{21} + \frac{1}{24} \cdot \left(\underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots}_{=2} \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{21} + \frac{1}{12} = \frac{13}{28},$$

dove la somma infinita vale 2 in quanto serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$. Dunque, la risposta al problema è $13 + 28 = 41$.

$\boxed{14}$ - *Attendete!* 死

"Attendete!" grida Markl, l'assistente di Aops, quando sente bussare alla porta del castello. Accanto a tale porta è posizionato un pulsante: premendolo, è possibile cambiare magicamente la destinazione raggiunta attraversando la porta. Le destinazioni possibili sono solo due: le Lambde Desolate e la capitale Kingsbury. Tuttavia, il pulsante è un po' difettoso: la k-esima volta che viene premuto, la destinazione della porta cambia con una probabilità di $\frac{1}{(k+1)^3+1}$. In questo momento la porta ha come destinazione le Lambde Desolate. *Qual è la probabilità che, dopo che Markl ha premuto* 50 *volte di fila il pulsante magico, la destinazione raggiungibile sia la capitale?*
[Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.]

Soluzione (**Risposta:** $\boxed{9281}$). Forniamo due svolgimenti per questo problema.

Metodo 1: Dato che inizialmente la destinazione della porta sono le Lambde Desolate, affinché la quella finale sia Kingsbury la destinazione deve cambiare complessivamente un numero dispari di volte. Consideriamo il seguente polinomio:

$$p(x) = \prod_{k=1}^{50} \left[\frac{1}{(k+1)^3+1} x + \left(1 - \frac{1}{(k+1)^3+1} \right) \right].$$

L'osservazione fondamentale è che, scrivendo $p(x)$ nella forma normale

$$p(x) = a_{50}x^{50} + a_{49}x^{49} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

per ogni $0 \leq j \leq 50$ il coefficiente a_j equivale alla probabilità che avvengano esattamente j cambi di destinazione. Quindi, la probabilità che avvenga un numero dispari di cambi di destinazione è la somma

$$a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{49}$$

dei coefficienti di grado dispari di $p(x)$.
Ricordiamo che la somma dei coefficienti di grado pari di un polinomio è $\frac{p(1)+p(-1)}{2}$ e che la somma dei coefficienti di grado dispari è dunque $p(1) - \frac{p(1)+p(-1)}{2}$. Si può immediatamente notare che $p(1) = 1$, per cui la somma dei coefficienti di grado dispari di p è $\frac{1-p(-1)}{2}$. Non ci resta dunque che calcolare $p(-1)$, che vale

$$p(-1) = \prod_{k=1}^{50} \left[-\frac{1}{(k+1)^3+1} + \left(1 - \frac{1}{(k+1)^3+1}\right)\right] = \prod_{k=1}^{50} \frac{(k+1)^3-1}{(k+1)^3+1}.$$

Per calcolare il valore di quest'espressione, poniamo $n = k+1$ e scriviamo la produttoria come

$$\prod_{n=2}^{51} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \prod_{n=1}^{51} \frac{(n-1)\left(n^2+n+1\right)}{(n+1)\left(n^2-n+1\right)} = \prod_{n=1}^{51} \left(\frac{n-1}{n+1}\right) \cdot \left(\prod_{n=2}^{51} \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right).$$

Ora calcoliamo separatamente le due produttorie, che sono entrambe telescopiche:

$$\prod_{n=2}^{51} \frac{n-1}{n+1} = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{2}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{7}} \cdots \frac{\cancel{48}}{\cancel{50}} \cdot \frac{\cancel{49}}{51} \cdot \frac{\cancel{50}}{52} = \frac{1 \cdot 2}{51 \cdot 52}.$$

$$\prod_{n=2}^{51} \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} = \frac{\cancel{7}}{3} \cdot \frac{\cancel{13}}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{21}}{\cancel{13}} \cdot \frac{\cancel{31}}{\cancel{21}} \cdots \frac{\cancel{49^2+49+1}}{\cancel{49^2-49+1}} \cdot \frac{\cancel{50^2+50+1}}{\cancel{50^2-50+1}} \cdot \frac{51^2+51+1}{\cancel{51^2-51+1}} = \frac{51^2+51+1}{3} = \frac{2653}{3}.$$

Mentre la prima produttoria è chiaramente telescopica, nella seconda questa proprietà è meno evidente. Per dimostrare questo fatto formalmente, si può verificare che per ogni n vale

$$n^2 + n + 1 = (n+1)^2 - (n+1) + 1,$$

pertanto il numeratore di ogni frazione si semplifica con il denominatore della frazione successiva. In definitiva,

$$\prod_{n=2}^{51} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{51 \cdot 52} \cdot \frac{2653}{3} = \frac{2653}{3978}.$$

Per concludere il problema, ricordiamo che la risposta è il valore di $\frac{1-p(-1)}{2}$, ovvero

$$\frac{1-p(-1)}{2} = \frac{1 - \frac{2653}{3978}}{2} = \frac{1325}{7956}.$$

La risposta al problema è dunque $1325 + 7956 = 9281$.

Metodo 2: Risolviamo ricorsivamente il problema. Sia p_k la probabilità che la destinazione sia la capitale al k-esimo passo. Questa è pari alla probabilità che al passo prima la destinazione fosse la capitale (p_{k-1}) per la probabilità che, premendo il bottone, la destinazione non sia cambiata $\left(1 - \frac{1}{(k+1)^3+1}\right)$, più la probabilità che al passo $k-1$ la destinazione <u>non</u> fosse la capitale $(1-p_k)$ per la probabilità che, premendo il bottone, la destinazione sia cambiata $\left(\frac{1}{(k+1)^3+1}\right)$. Questo si traduce nella ricorsione

$$p_k = \left(1 - \frac{1}{(k+1)^3+1}\right) p_{k-1} + \frac{1}{(k+1)^3+1} \cdot (1 - p_{k-1}) = \frac{1}{(k+1)^3+1} + \frac{(k+1)^3-1}{(k+1)^3+1} p_{k-1}.$$

Inoltre sappiamo che $p_0 = 0$, visto che all'inizio sono raggiungibili le Lambde Desolate.
Questa è una ricorsione *lineare non omogenea del primo ordine a coefficienti non costanti*, in si può esprimere come $p_k = F(p_{k-1})$, con $F(x) = a_kx + b_k$ che è un polinomio di primo grado, a coefficienti variabili $a_k = \frac{(k+1)^3-1}{(k+1)^3+1}$ e $b_k = \frac{1}{(k+1)^3+1}$.

La particolarità di ricorsioni di questo genere è che, se consideriamo due soluzioni q_k, p_k, allora la differenza $p_k - q_k$ soddisfa la ricorsione omogenea: infatti se

$$p_k = \frac{1}{(k+1)^3+1} + \frac{(k+1)^3-1}{(k+1)^3+1}p_{k-1}, \quad q_k = \frac{1}{(k+1)^3+1} + \frac{(k+1)^3-1}{(k+1)^3+1}q_{k-1}$$

sottraendo membro a membro le due equazioni, otteniamo che

$$(p_k - q_k) = \frac{(k+1)^3-1}{(k+1)^3+1}(p_{k-1} - q_{k-1})$$

che è una ricorsione omogenea. Pertanto, due soluzioni qualunque della ricorsione considerata differiscono per una soluzione della ricorsione omogenea. Quindi la soluzione cercata p_k della ricorsione $p_k = F(p_{k-1})$ si può scrivere come $q_k + o_k$, dove q_k è una soluzione particolare della ricorsione considerata, mentre o_k è la soluzione della ricorsione omogenea. Per trovare o_k, notiamo che

$$o_k = \frac{(k+1)^3-1}{(k+1)^3+1}o_{k-1} = \frac{(k+1)^3-1}{(k+1)^3+1} \cdot \frac{k^3-1}{k^3+1}o_{k-2} = \ldots = \left(\prod_{j=1}^{k} (1+j)^3 - 1(1+j)^3+1\right) \cdot o_0$$

e quindi, visto che o_0 è arbitrario, pari a x, rimane da calcolare $\prod_{j=1}^{k} \frac{(1+j)^3-1}{(1+j)^3+1} = \prod_{n=2}^{k+1} \frac{n^3-1}{n^3+1}$, che si calcola come nel metodo precedente, ottenendo

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{k} (1+j)^3 - 1(1+j)^3+1 = \prod_{n=2}^{k+1} n^3 - 1n^3+1 &= \frac{2}{(k+1)(k+2)} \cdot \frac{(k+1)^2+(k+1)+1}{3} \\ &= \frac{2(k+1)(k+2)+2}{3(k+1)(k+2)} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3(k+1)(k+2)}.\end{aligned}$$

Pertanto $o_k = \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3(k+1)(k+2)}\right)x$. Per trovare una soluzione particolare q_k, *per analogia*, si può cercare di trovare una soluzione costante per la ricorsione $q_k = F(q_{k-1})$. Sia $q_k \equiv c$, e otteniamo

$$c = \frac{1}{(k+1)^3+1} + \frac{(k+1)^3-1}{(k+1)^3+1}c, \quad \leftrightarrow \quad \frac{2c-1}{(k+1)^3+1} = 0$$

e quindi l'unica possibilità è $c = 1/2$. Pertanto otteniamo che

$$p_k = q_k + o_k = \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3(k+1)(k+2)}\right)x.$$

Imponendo che $p_0 = 0$, si ottiene $x = -\frac{1}{2}$. In conclusione

$$p_k = q_k + o_k = \frac{1}{6} - \frac{1}{3(k+1)(k+2)},$$

che per $k = 50$ fornisce $p_k = \frac{1325}{7956}$.

---

15 - *Una lunga scalinata*

"Ma quanto sei pesante!" esclama Sophie al cagnolino che sta portando in braccio mentre sale le scale del Palazzo Reale. La fatica si fa sentire, dato che i gradini da salire sono addirittura 2024, numerati da 1 a 2024. Per portare a termine l'impresa e incontrare Madame Suliman, Sophie decide di fermarsi a riposare su ogni gradino k, con k tale che $(k-1)(k+1)$ sia divisibile per 2024. *Quante volte si riposerà Sophie prima di completare la salita?*

*Soluzione (**Risposta:** $\boxed{16}$).* Affinché $(k-1)(k+1)$ sia multiplo di $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$, devono valere le seguenti condizioni.

- $2^3 \mid (k-1)(k+1)$. Chiaramente k deve essere dispari; d'altro canto tale condizione è anche sufficiente, poiché il precedente e il successivo di un numero dispari sono sempre uno multiplo di 2 e l'altro multiplo di 4, in un qualche ordine, quindi il loro prodotto è certamente divisibile per 8.
- $11 \mid (k-1)(k+1)$. Essendo 11 primo, vale $11 \mid k-1$ oppure $11 \mid k+1$, ossia $k \equiv \pm 1 \pmod{11}$.
- $23 \mid (k-1)(k+1)$. Essendo 23 primo, vale $23 \mid k-1$ oppure $23 \mid k+1$, ossia $k \equiv \pm 1 \pmod{23}$.

In definitiva:

$$\begin{cases} k \equiv 1 \pmod 2 \\ k \equiv \pm 1 \pmod{11} \\ k \equiv \pm 1 \pmod{23}. \end{cases}$$

A seconda delle scelte del segno nella seconda e nella terza congruenza, otteniamo quattro diversi sistemi di congruenze. Per il Teorema Cinese del Resto, ciascuno di questi ha una e una sola soluzione modulo $506 = 2 \cdot 11 \cdot 23$. Essendo $2024 = 4 \cdot 506$, ci sono $4 \cdot 4 = 16$ valori validi per k tra 1 e 2024, e la risposta è 16. Per completezza, risolvendo il sistema di congruenze indicato, si ottengono i k cercati, che sono della forma $1 + 506n$, $45 + 506n$, $461 + 506n$, $505 + 506n$, con $n = 0, 1, 2, 3$.

---

16 - *È una cavalletta!*

"Ma è tutto spiegazzato! Cosa sarebbe?" esclama l'anziana signora Toki. "È un origami! L'ho realizzando partendo da un foglio di forma quadrata sul quale ho tracciato tre segmenti verticali e tre orizzontali, equidistanti tra loro, per formare una griglia quadrata 4×4. Poi ho eseguito una sequenza di piegature, ciascuna lungo uno dei segmenti tracciati; in particolare, dopo ogni piegatura ho ottenuto un rettangolo (eventualmente quadrato). Poi mi sono fermato appena ho ottenuto un quadrato 1×1..." le spiega gentilmente Sosuke. "Ho capito, è una cavalletta!" risponde soddisfatta Toki, non accorgendosi che in realtà quella era una nave! *Quante sono le possibili diverse sequenze di rettangoli di carta che Sosuke può aver ottenuto, effettuando una piegatura per volta?*

[In tale sequenza, due rettangoli si considerano uguali se e solo se sono ottenibili l'uno dall'altro tramite traslazione, ma non rotazione. Per esempio, due rettangoli 3×4 e 4×3 sono diversi, mentre tutti i rettangoli 2×3 sono uguali.]

Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{46}$). Effettuando una piegatura su un rettangolo $m \times n$, osserviamo che in generale possiamo ottenere un qualsiasi rettangolo $h \times n$ con $m > h \geq \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$, o analogamente $m \times k$ con $n > k \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Per esempio, piegando un rettangolo 4×3 possiamo ottenere i rettangoli 3×4, 2×4, 4×2.

Conviene risolvere il problema ricorsivamente con una tabella di 4 righe e 4 colonne, scrivendo in ogni casella (i, j) il numero di sequenze di piegature con cui è possibile ottenere un rettangolo $i \times j$.

$\times$	**4**	**3**	**2**	**1**
4	1	1	2	2
3	1	2	5	7
2	2	5	14	23
1	2	7	23	46

Per esempio, nella casella $(3, 2)$ scriviamo 5, poiché si può ottenere un rettangolo 3×2 piegando una volta un rettangolo 4×2 (che a sua volta si può ottenere in 2 modi partendo da un 4×4), oppure un 3×3 (che si può ottenere in 2 modi), oppure un 3×4 (che si può ottenere in 1 modo). Riempiendo ricorsivamente la tabella in questo modo a partire dalla casella $(4, 4)$, troviamo che la risposta è 46.

---

17 - *S, C, E, M, O*

Sosuke sta osservando con un binocolo le navi all'orizzonte, alla ricerca dei segnali in codice Morse lanciati dalla nave del padre, che rintraccia immediatamente. "Risa, dice che ti ama!" esclama Sosuke. "S, C, E, M, O" gli dice di rispondere la madre! Successivamente, Sosuke riceve come risposta una sequenza di 12 caratteri (• oppure -) non periodica, di cui sta cercando il significato. *Quante sono le possibili sequenze?*

[Una sequenza s si dice periodica se esiste una sequenza w (con $|w| < |s|$), tale per cui $s = ww \dots w$, cioè s si può ottenere concatenando varie volte la sequenza w. Ad esempio • • - • • - è periodica, mentre • - • - • • non lo è.]

Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{4020}$). Le possibili stringhe di • e - senza restrizioni sono $2^{12} = 4096$: da queste, sottraiamo la quantità di stringhe periodiche. Per contarle, le classifichiamo in base al periodo, che può essere un qualsiasi divisore di 12 diverso da 12 stesso.

- Le stringhe periodiche con periodo 1 sono quella con solo • e quella con solo -: in tutto 2 casi.
- Le stringhe periodiche con periodo 2 sono $2^2 = 4$, poiché questi sono i modi di costruire ogni blocco di due cifre. Tuttavia, occorre sottrarre le 2 stringhe di periodo 1, che abbiamo già contato: in tutto $4 - 2 = 2$ nuovi casi.
- Le stringhe periodiche con periodo 3 sono $2^3 = 8$, poiché questi sono i modi di costruire ogni blocco di tre cifre. Tuttavia, occorre sottrarre le 2 stringhe di periodo 1, che abbiamo già contato: in tutto $8 - 2 = 6$ nuovi casi.

- Le stringhe periodiche con periodo 4 sono $2^4 = 16$, poiché questi sono i modi di costruire ogni blocco di quattro cifre. Tuttavia, occorre sottrarre le 2 stringhe di periodo 1 e le 2 stringhe di periodo 2, che abbiamo già contato: in tutto $16 - 2 - 2 = 12$ nuovi casi.
- Le stringhe periodiche con periodo 6 sono $2^6 = 64$, poiché questi sono i modi di costruire ogni blocco di sei cifre. Tuttavia, occorre sottrarre le 2 stringhe di periodo 1, le 2 stringhe di periodo 2 e le 6 stringhe di periodo 3, che abbiamo già contato: in tutto $64 - 2 - 2 - 6 = 54$ nuovi casi.

In definitiva, le stringhe periodiche sono $2 + 2 + 6 + 12 + 54 = 76$ e la risposta è $4096 - 76 = 4020$.

---

18 - *Il potere del Mare*

Fujimoto, il padre di Polinomyo, sta creando un elisir magico che racchiude tutto il potere del Mare. Tale elisir è formato dalla miscela di due liquidi: il passaggio fondamentale della ricetta richiede di dosare accuratamente la quantità di liquido blu, che dipende dalla quantità di liquido giallo ed è stabilita dal polinomio $p(x)$ a coefficienti reali. Questa relazione da rispettare, che vale ogni x reale per cui è ben definita, è la seguente:

$$\frac{p(2x)}{p(x+1)} = 16 - \frac{240}{x+15}.$$

Dopo attenti calcoli, Fujimoto decide di utilizzare esattamente 1 litro di liquido giallo e 315 litri di liquido blu. "Quindi $p(1) = 315$" afferma Polinomyo. *Quanti litri di liquido blu sarebbero serviti se avesse utilizzato 2 litri di liquido giallo?*

Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{\mathbf{1024}}$). Effettuando la differenza a secondo membro, possiamo ottenere $\frac{p(2x)}{p(x+1)} = \frac{16x}{x+15}$ da cui $p(2x)(x+15) = 16x \cdot p(x+1)$. Notiamo che questa identità eguaglia due polinomi e, quindi, vale per ogni x reale.
Innanzittutto cerchiamo di individuare il grado di $p(x)$. Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}$, con $a_n \neq 0$ e n pari al grado del polinomio, allora otteniamo che

$$p(2x)(x+15) = (a_n(2x)^n + \ldots)(x+15) = 2^n \cdot a_n \cdot x^{n+1} + \ldots$$

e

$$16x \cdot p(x+1) = 16x(a_n(x+1)^n + \ldots) = 16x \cdot p(x+1) = 16x(a_n x^n + \ldots) = 16a_n x^{n+1} + \ldots$$

dove, in entrambi i casi, i puntini finali indicano termini di grado minore od uguale ad n. Eguagliando i due coefficienti direttivi trovati $2^n \cdot a_n$ e $16a_n$ otteniamo che $2^n = 16$, ossia $n = 4$. Pertanto $p(x)$ ha grado pari a 4. A questo punto, possiamo procedere a individuare alcune radici di $p(x)$, utilizzando l'identità $p(2x)(x+15) = 16x \cdot p(x+1)$, sapendo che $p(x)$ ha al più 4 radici.
Notiamo che il membro destro si annulla per $x = 0$, da cui $p(0) = 0$ e quindi $p(x)$ è divisibile per x. Pertanto $p(x) = xq_3(x)$, con $q_3(x)$ polinomio di grado 3. Sostituendo, otteniamo $2x \cdot q_3(2x)(x+15) = 16x(x+1)q_3(x+1)$, da cui $q_3(2x)(x+15) = 8(x+1)q_3(x+1)$. Analogamente a prima, per $x = -1$ si ottiene $14q_3(-2) = 0$ e quindi $x+2$ divide $q_3(x)$, ossia $q_3(x) = (x+2)q_2(x)$, con $q_2(x)$ di secondo grado.
Sostituendo, si ottiene $(2x+2)q_2(2x)(x+15) = 8(x+1)((x+2)+1)q_2(x+1)$, da cui

$$q_2(2x)(x+15) = 4(x+3)q_2(x+1).$$

Ripetendo il ragionamento per $x = -3$, otteniamo $13q_2(-6) = 0$, ossia $x+6$ divide $q_2(x)$ e quindi $q_2(x) = (x+6)q_1(x)$. Sostituendo, si ottiene

$$(2x+6)q_1(2x)(x+15) = 4(x+3)((x+6)+1)q_1(x+1)$$

da cui $q_1(2x)(x+15) = 2(x+7)q_1(x+1)$. Da $x = -7$, si ottiene che $8q_1(-14) = 0$ e quindi $x+14$ divide $q_1(x)$. Visto che $q_1(x)$ è di primo grado, otteniamo $q_1(x) = c(x+14)$, per una certa costante c. Sostituendo un'ultima volta, si ottiene

$$c(2x+14)(x+15) = 2c(x+7)((x+14)+1)$$

che è una identità. Quindi possiamo ricostruire $p(x)$ arrivando a

$$p(x) = xq_3(x) = x(x+2)q_2(x) = x(x+2)(x+6)q_1(x) = cx(x+2)(x+6)(x+14).$$

Per ipotesi $p(1) = 315$ e $p(1) = c \cdot 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 15 = 315$, ossia $c = 1$.
Il problema ci chiede di calcolare $p(2)$, ossia $2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 = 2^{1+2+3+4} = 1024$.

---

19 - *E voi come vivrete?* 死

Mathito trova una copia del romanzo *E voi come vivrete?* annotato dalla madre. Una delle note recita: "Trova gli interi positivi n con al più cinque cifre tali che $S(n) = 15$ e $S(n + 45689) = 11$". Neanche il tempo di capire che $S(n)$ indica la somma delle cifre di n, che un misterioso Erone lo disturba dalla finestra... *Quanti sono i possibili valori di n?*

Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{\mathbf{314}}$). Sia $n = \overline{abcde}$, con $0 \leq a, b, c, d, e \leq 9$, dove consideriamo ammissibile che la prima cifra sia 0 per considerare tutti i numeri n con al più cinque cifre. Inoltre, chiamiamo $m = n + 45689$.
Se eseguissimo la somma tra n e 45689 senza effettuare alcun riporto, varrebbe che $s(m) = s(n) + 4 + 5 + 6 + 8 + 9 = 47$. Dunque, i vari riporti della somma devono far sì che $s(m)$ raggiunga il valore di 11. La cifra delle unità di m prima di effettuare i riporti può essere al massimo $9 + 9 = 18$. Ciò significa che, se è necessario un riporto, bisogna sottrarre 10 dalla cifra delle unità e sommare 1 a livello delle decine. Dato che non c'è mai un riporto maggiore di 1, tale riporto contribuirebbe a una diminuzione di 9 del valore di $s(m)$. Analogamente, la cifra delle decine di m vale al massimo $9+9+1 = 19$, tenendo conto di un eventuale riporto dalle unità. Questo valore è inferiore a 20, quindi neanche in questo caso ci potrà essere un riporto maggiore di 1. Dunque, anche un riporto a questo livello contribuirebbe a una diminuzione di 9 del valore di $S(m)$. Il discorso per le altre cifre è del tutto analogo. Possiamo quindi concludere che ogni riporto effettuato fa diminuire il valore di $s(m) = 47$ di esattamente 9. Per procedere, notiamo che $47 - 11 = 36 = 4 \cdot 9$. Questo implica che nell'effettuare la somma tra n e 45689 andranno effettuati esattamente quattro riporti (e questo ci permette anche di concludere che n deve avere almeno quattro cifre).
Non ci resta che contare quanti sono i possibili valori di n. Per farlo, suddivideremo il problema in cinque casi, a seconda dell'ordine di grandezza della cifra che non causerà riporto (unità, decine, centinaia, migliaia e decine di migliaia):

- **Unità**: deve valere che $e = 0$, $d \geq 2$, $c \geq 3$, $b \geq 4$ e $a \geq 5$ (per evitare errori bisogna fare attenzione ai riporti già effettuati con le cifre precedenti!). Dunque, dato che $a+b+c+d+e = 15$, risulta facile accorgersi che i valori di n possibili saranno solamente 4.

- **Decine**: deve valere che $e \geq 1$, $d = 0$, $c \geq 4$, $b \geq 4$ e $a \geq 5$. Dunque, dato che $a + b + c + d + e = 15$, è facile accorgersi che anche in questo caso i valori di n possibili saranno solamente 4.

- **Centinaia**: deve valere che $e \geq 1$, $d \geq 1$, $c \leq 2$, $b \geq 5$ e $a \geq 5$. Per contare i possibili valori di n, definiamo $a' = a - 5$, $b' = b - 5$, $d' = d - 2$ ed $e' = e - 1$. Dovrà quindi valere che $a' + b' + c + d' + e' = 3$, che fornisce un totale di $\binom{3+4}{4} = 34$ (ci sono infatti 3 "palline" e 4 "sbarrette") possibili valori di n.

- **Migliaia**: deve valere che $e \geq 1$, $d \geq 1$, $c \geq 3$, $b \leq 3$ e $a \geq 6$. Per contare i possibili valori di n, definiamo $a' = a-6$, $c' = c - 3$, $d' = d - 1$ ed $e' = e - 1$. Dovrà quindi valere che $a' + b + c' + d' + e' = 4$, che fornisce un totale di $\binom{4+4}{4} = 70$ possibili valori di n. Tuttavia, bisogna fare attenzione a escludere il caso in cui $c = 4$ (dato che c'è la condizione $c \leq 3$) e il caso in cui $a' = 4$ (dato che accadrebbe che $a = a' + 6 = 10$, che non è una cifra). Dunque, questo caso forisce un totale di 68 possibili valori di n.

- **Decine di migliaia**: deve valere che $e \geq 1$, $d \geq 1$, $c \geq 3$, $b \geq 4$ e $a \leq 4$. Per contare i possibili valori di n, definiamo $b' = b - 4$, $c' = c - 3$, $d' = d - 1$ ed $e' = e - 1$. Dovrà quindi valere che $a + b' + c' + d' + e' = 6$, che fornisce un totale di $\binom{6+4}{4} = 210$ possibili valori di n. Tuttavia, bisogna fare attenzione a escludere il caso in cui $a = 6$ (dato che c'è la condizione $a \leq 3$), i casi in cui $a = 5$ (che sono in totale 4) e il caso in cui $b' = 6$ (dato che accadrebbe che $b = b' + 4 = 10$, che non è una cifra). Dunque, questo caso fornisce un totale di 204 possibili valori di n.

Il numero totale di possibili valori di n è dunque $4 + 4 + 34 + 68 + 204 = 314$, che è la risposta al problema.

---

20 - *La cena dei parrocchetti* 簡単

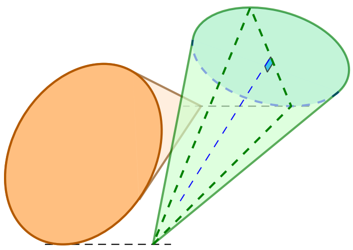
Durante il suo viaggio, Mathito incontra 2024 simpatici parrocchetti colorati di verde o di giallo che stanno preparando una deliziosa cena. Una particolarità dei parrocchetti è che i parrocchetti verdi rispondono alle domande in maniera sempre veritiera, mentre quelli gialli rispondono a caso, ma mai correttamente per 10 volte di fila o incorrettamente per 10 volte di fila. Mathito vuole scoprire quale sarà la portata principale della cena, e per farlo pone 2024 domande a tutti i parrocchetti. Alla prima domanda tutti i parrocchetti rispondono correttamente, mentre dalla seconda in poi le risposte corrette sono sempre esattamente 1012 (e le altre sono errate). *Quanti sono al massimo i parrocchetti verdi?*

Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{\mathbf{899}}$). Se un parrocchetto giallo risponde in maniera incorretta a una certa domanda, nelle successive 9 domande dovrà rispondere correttamente almeno una volta. Dunque, se all'n-esima domanda rispondono in maniera errata 1012 parrocchetti gialli, nelle 9 domande successive ci saranno complessivamente almeno 1012 risposte corrette da parte degli stessi. Per il principio dei cassetti, ci sarà una domanda a cui risponderanno correttamente almeno $\left\lceil \frac{1012}{9} \right\rceil$ tra i 1012 parrocchetti gialli che hanno risposto in maniera incorretta all'n-esima domanda. Detto v il numero di parrocchetti verdi, la quantità $v + \left\lceil \frac{1012}{9} \right\rceil$ non può superare la quantità di risposte corrette, per cui

$$\left\lceil \frac{1012}{9} \right\rceil + v \leq 1012$$
$$v \leq 1012 - \left\lceil \frac{1012}{9} \right\rceil = 899.$$

Pertanto, v non può essere maggiore di 899. Ora vogliamo verificare che il caso $v = 899$ è effettivamente possibile, esibendo un'opportuna configurazione che soddisfi le ipotesi del problema.

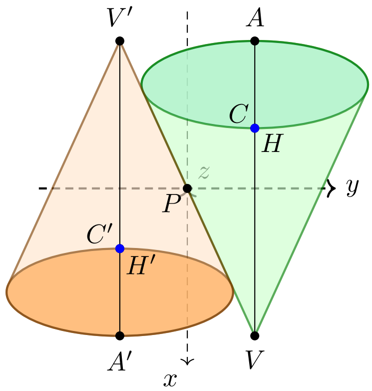
Partizioniamo i $2024 - 899 = 1125$ parrocchetti gialli in 10 sottoinsiemi disgiunti $U_1, U_2, \ldots, U_{10}$, in modo che $|U_i| = 113$ per $1 \leq i \leq 5$ e $|U_j| = 112$ per $6 \leq j \leq 10$. Per ogni $n \geq 2$, rispondono correttamente i parrocchetti gialli dell'insieme $U_{n \bmod 10}$. Se $|U_{n \bmod 10}| = 113$, allora ci sono già $113 + 899 = 1012$ risposte corrette e tutti gli altri parrocchetti gialli rispondono in modo errato; se invece $|U_{n \bmod 10}| = 112$ allora risponde correttamente anche un altro parrocchetto giallo appartenente a uno qualsiasi degli altri sottoinsiemi, mentre tutti gli altri parrocchetti gialli rispondono in modo errato, e anche in questo caso si hanno esattamente 1012 risposte corrette. Seguendo queste regole, nessun parrocchetto giallo risponde per 10 volte di fila nello stesso modo. La risposta è dunque 899.

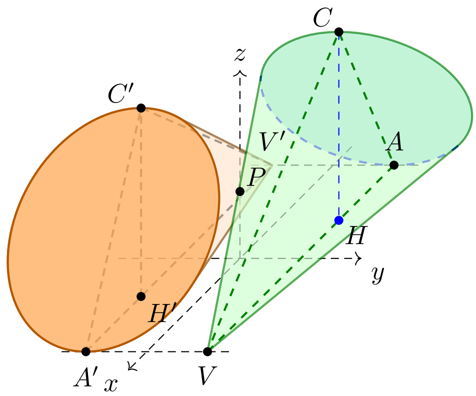


21 - ***Equilibrio instabile***

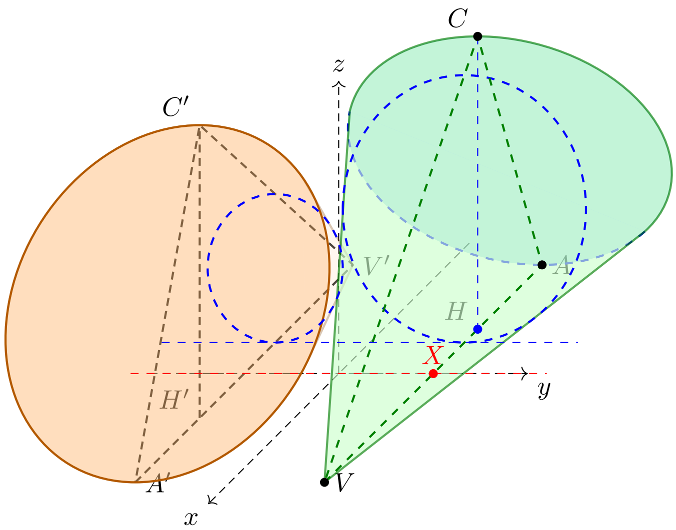
Quando Mahito incontra il suo prozio, quest'ultimo gli mostra un tavolo piano su cui si trova piccola torre formata da 13 solidi che sfidano le leggi dell'equilibrio: essa viene utilizzata per mantenere l'equilibrio all'interno del mondo. Alla base della torre ci sono due coni retti con raggio di base 1 cm ed altezza 4 cm, che sono appoggiati sul tavolo lungo la faccia laterale in maniera tale che i due segmenti di appoggio siano i due lati opposti di un rettangolo. Le superfici laterali dei due coni si toccano in un solo punto P: ciò è fondamentale per mantenere in equilibrio la struttura. *Quanto vale il quadrato della distanza di P dal tavolo, in cm^2?*
[Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.]

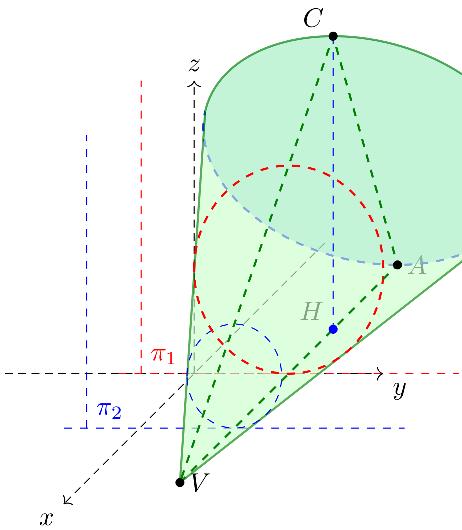
Soluzione (***Risposta:*** $\boxed{293}$). Consideriamo graficamente meglio la situazione, vista dall'alto e trasversalmente. P è il punto di tangenza cercato.



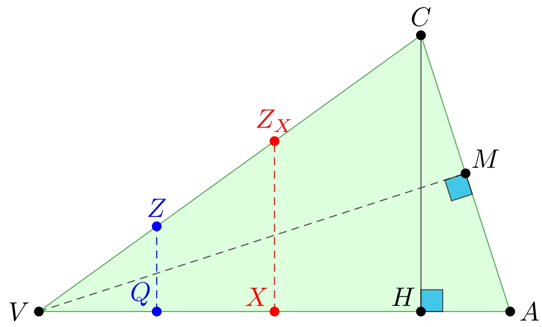


Per capire quale sia il punto di contatto tra i due coni, consideriamo l'insieme dei piani π che sono perpendicolari al piano xy e sono paralleli al piano yz. Questi piani secano ciascuno dei due coni trasversalmente e le figure individuate, per una nota proprietà dei coni, sono delle *ellissi*, come si può osservare nella figura qui in basso a sinistra.





Come si può osservare, la dimensione delle ellissi (evidenziate in blu) nella figura di sinistra, variano in base alla posizione del piano secante indicato in blu. In particolare, come evidenziato nella figura qui in alto a destra, le ellissi chiaramente diventano più piccole a man mano che il piano secante π si avvicina alla punta di un cono. L'unica possibilità affinché i due coni si tangano è che le due ellissi risultanti, normalmente disgiunte, siano a loro volta tangenti e, questo, si ottiene considerando il piano secante, indicato in rosso, che passa a metà della lunghezza dell'apotema di base su cui sono appoggiati i coni.
Pertanto, per calcolare l'altezza del punto di tangenza P, ci basta calcolare l'altezza del semiasse maggiore delle ellissi, che è pari alla metà del loro asse maggiore. Consideriamo il piano passante ACV e, quindi, troviamo la quantità cercata considerato questa sezione del cono indicato in verde.



Siano quindi $a = VA$ e $r = AM = CA/2 = 1$ e $h = VM = 4$. Otteniamo facilmente che $a = \sqrt{17}$ per il teorema di Pitagora.
Consideriamo il problema generale di calcolare il segmento QZ, con $QZ \perp VA$, dove Q sta su AB. Il nostro obiettivo è calcolare QZ per $Q \equiv X$.
Sia $t = AH$. Notiamo che $CH^2 = CA^2 - AH^2 = 2^2 - t^2$, ma anche $CH^2 = CV^2 - VH^2 = 17 - (\sqrt{17} - t)^2$ e con facili conti si ottiene $t = \frac{2}{\sqrt{17}}$. In particolare, $CH = \sqrt{CA^2 - AH^2} = \frac{8}{\sqrt{17}}$. Sia $QV = x$. Allora, per similitudine tra VQZ e VHC, abbiamo che $\frac{QZ}{VQ} = \frac{CH}{VH}$, ossia $QZ = x\frac{CH}{VH}$. Abbiamo che

$$VH = \sqrt{VC^2 - CH^2} = \sqrt{17 - \frac{64}{17}} = \frac{15}{\sqrt{17}}.$$

Allora, l'altezza cercata si ottiene per $Q \equiv X$, ossia $x = VA/2 = \sqrt{17}/2$, ossia

$$Z_X X = \frac{\sqrt{17}}{2} \cdot \frac{8}{\sqrt{17}} \cdot \frac{\sqrt{17}}{15} = \frac{4\sqrt{17}}{15}.$$

La risposta è il quadrato di metà di tale altezza, ossia $\left(\frac{2\sqrt{17}}{15}\right)^2 = \frac{68}{225}$ e quindi la risposta è 293.