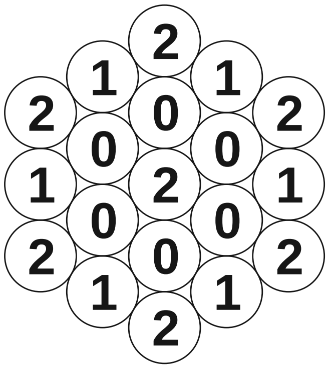
GARA DI MATEMATICA ON-LINE (3/11/2021)

1. A TEATRO [420]

Si tratta di sommare i 21 numeri consecutivi a partire da 10. Se togliamo 10 a tutti (in totale $10 \cdot 21 = 210$) ci avanza la somma da 1 a 20 che sappiamo calcolare $\frac{20 \cdot 21}{2} = 210$.

In totale ci sono $210 + 210 = 420$ posti a sedere.



2. L'ANNO IN CORSO [12]

Partendo dal "2" al centro, abbiamo 6 possibili scelte per lo "0" una scelta obbligata per il secondo "2" e due possibili scelte per l' "1".

In totale $6 \cdot 2 = 12$ possibilità.

3. TANTE POTENZE [80]

Osserviamo che $100 = 10^2$. Sfruttando le proprietà delle potenze, possiamo scrivere: $10^{100} = 10^n \cdot \left(10^2\right)^{10}$, cioè $10^{100} = 10^{n+20}$ e quindi $n = 80$.

4. GIUSTO UN CONTO [142]

Scriviamo la somma in notazione decimale: $10a + b + 10c + d = 71$ cioè $10(a+c) + (b+d) = 71$.

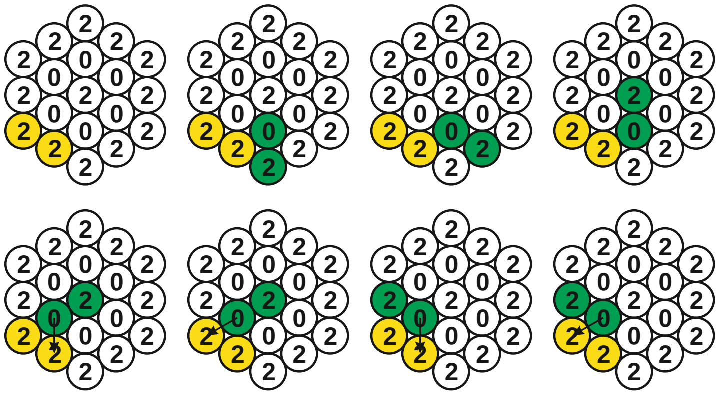
Facciamo la stessa cosa con la somma richiesta:

$10a + d + 10c + d + 10a + b + 10c + d = 20(a+c) + 2(b+d) = 2\left(10(a+c) + (b+d)\right) = 2 \cdot 71 = 142$.

5. L'ANNO CHE VERRÀ [84]

Prima di tutto contiamo i modi di avere due "2" attaccati. Per fare ciò è necessario scegliere uno dei vertici dell'esagono ed uno dei due "2" ad esso adiacenti, e possiamo farlo in $6 \cdot 2 = 12$ modi.

Ora cerchiamo tutte le possibili scritture di 2022. Fissiamo una coppia e contiamo le possibilità. Con un po' di attenzione si identificano sette percorsi possibili per un totale di 84 modi.



6. FRUTTA IN EQUILIBRIO [30]

Se $3p = 5m$ e $p = 2k + m$ allora, sostituendo la seconda relazione nella prima, otteniamo che $3(2k+m) = 5m$, cioè $m = 3k$. Quindi $10m = 30k$.

7. PRIMI [5]

Scriviamo la differenza in maniera furba utilizzando la proprietà distributiva:

$2.020.000 - 2.020 = 2020(1000-1) = 2020 \cdot 999$

Ora $999 = 3^3 \cdot 37$ mentre $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, quindi sono presenti 5 numeri primi diversi.

8. IL PICCOLO RETTANGOLO [128]

In generale, il rettangolo di area fissata e perimetro minimo è il quadrato (rettangolo con base e altezza uguali). Non essendo 1020 un quadrato perfetto, cerchiamo una base ed una altezza che abbiano circa lo stesso valore. Siccome $1020 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$ le due misure cercate sono $34 = 17 \cdot 2$ e $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Il perimetro vale $2p = 2(34+30) = 128\ \mathrm{cm}$.

9. UNA ACCA NUMERICA [1368]

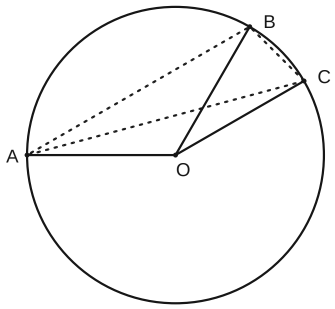
Dovendo le cifre essere i fattori di tre moltiplicazioni si possono scartare subito le cifre 0, 5 e 7. Restano 1, 2, 3, 4, 6, 8 e 9 che saranno le cifre da usare.
Le cifre multiple di 3 sono solo 3 6 e 9 che dovranno essere messe il 3 e il 6 agli estremi di un braccio dell'H, mentre il 9 nella casella centrale dell'altro braccio.
A questo punto sistemare nello schema i multipli di 2 e l'1 è quasi obbligato. Nella figura una delle possibili soluzioni.

3		1
4	2	9
6		8

10. I CUBI DI ELENA [10]

Con tutte le facce dello stesso colore ne può realizzare 2, uno tutto bianco ed uno tutto rosso.
Con 1 sola faccia rossa ne può realizzare uno solo, così come con una sola faccia bianca.
Con 2 facce rosse i cubi possibili diversi sono 2, a seconda se le due facce sono adiacenti od opposte, analogamente per le due facce bianche.
Con tre facce bianche e tre rosse, abbiamo 2 cubi possibili, a seconda de le tre facce concorrono in un medesimo vertice o no.
In totale vi sono 10 possibili cubi diversi.

11. QUESTIONI DI ANGOLI [105]



Riferendoci alla figura a fianco: se l'arco AB è la terza parte della circonferenza, allora l'angolo $A\hat{O}B = \frac{360°}{3} = 120°$ e l'angolo $B\hat{C}A = 60°$, visto che è l'angolo alla circonferenza dell'angolo al centro $A\hat{O}B$.
Analogamente per l'angolo $B\hat{O}C = \frac{360°}{12} = 30°$ e di conseguenza $B\hat{A}C = 15°$.
$A\hat{B}C = 180° - 60° - 15° = 105°$

12. L'ANTIPATICA [5]

Le strette di mano tra n persone sono $\frac{n(n-1)}{2}$. Cerchiamo il primo valore n che fa superare 271.
Con $n = 24$ le strette di mano sarebbero 276 e quindi a Lucia sono antipatiche 5 persone.

13. GETTONI COLORATI [180]

Sia x il numero di gettoni gialli. Dai dati forniti possiamo scrivere la seguente proporzione:
$x : 4 = 315 : (3+4)$ che porta a determinare $x = 180$

14. VERSO CASA [48]

Detta s la distanza da percorrere e t il tempo per arrivare perfettamente puntuali, dai dati del problema si possono scrivere le seguenti equazioni: $s = 40(t+1)$ e $s = 60(t-1)$. Uguagliando le due relazioni trovate abbiamo che $40(t+1) = 60(t-1)$ equazione che risolta porta a $t = 5\ \mathrm{h}$.
La velocità da mantenere è quindi $v = \frac{s}{t} = \frac{40(5+1)}{5} = 48\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

15. ORECCHINI [600]
Se tutte le donne con due orecchini regalassero un orecchino a quelle che non ce l'anno, tutte le donne del villaggio avrebbero un orecchino. In totale ci sono 600 orecchini nel villaggio.

16. I COLORI [298]
Di colori puri ne faccio 12.
Mescolando due colori ne faccio $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$.
Mescolando tre colori ottengo $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2} = 220$ colori diversi.
In totale ho $220 + 66 + 12 = 298$ possibili scelte.

17. CRITTOGRAMMA [2185]

$$\overline{ABCDEF} \times 2 = \overline{CDEFAB}$$
$$\overline{ABCDEF} \times 3 = \overline{BCDEFA}$$
$$\overline{ABCDEF} \times 4 = \overline{EFABCD}$$
$$\overline{ABCDEF} \times 5 = \overline{FABCDE}$$
$$\overline{ABCDEF} \times 6 = \overline{DEFABC}$$

Osserviamo prima di tutto la quarta moltiplicazione. Non potendo essere $E = 0$, resta solo la possibilità che $E = 5$ per le proprietà della tabellina del 5.
Osserviamo la terza moltiplicazione: un numero moltiplicato per 4 ha 5 come cifra più significativa. A deve essere 1.
Osservando ora la seconda moltiplicazione, solo 7 moltiplicato per 3 finisce con la cifra 1, quindi $F = 7$.
A questo punto sfruttando le altre moltiplicazioni e il fatto di conoscere $F = 7$ ci permette di trovare $B = 4$, $D = 8$ e $C = 2$.
$\overline{CADE} = 2185$.

18. PROBABILE MA NON TROPPO [4]

$$P(\text{stesso colore}) = P(GG) + P(BB) + P(VV) = \frac{5}{21} \cdot \frac{4}{20} + \frac{10}{21} \cdot \frac{9}{20} + \frac{6}{21} \cdot \frac{5}{20} = \frac{140}{21 \cdot 20} = \frac{1}{3}$$

19. QUESTIONE DI BASE [16]
Scrivendo in notazione decimale la relazione assegnata si ottiene; $5 \cdot 7 = 2b + 3$ che porta a determinare $b = 16$

20. L'ACQUARIO [5625]
Indicata con A l'acqua totale dell'acquario e con P l'acqua pulita inserita, dopo il primo cambio la frazione di acqua pulita è $\frac{P}{A}$ e quella sporca $1 - \frac{P}{A} = 1 - \frac{5}{45} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$. Per togliere 5 litri di acqua sporca bisogna trovare il numero x tale che $\frac{8}{9}x = 5$ cioè $x = \frac{45}{8} = 5{,}625 \text{ litri} = 5625 \text{ ml}$.