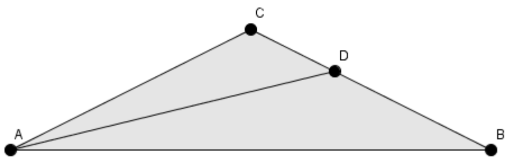
BELMANTO 2019 - SOLUZIONI

28 gennaio 2019



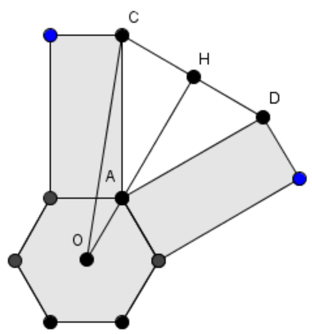
1.- Per il teorema della bisettrice: AC : AB = CD : DB ; componendo: $DB = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot 60\,cm$ e poi: $DC = \dfrac{3-\sqrt{3}}{6} \cdot 60\,cm$.

Quindi: $DB \cdot DC = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{6} \cdot 60^2\,cm^2 \cong 278,46\,cm^2$.

[Risposta **278**]

2. Contiamo le configurazioni vincenti:
Vittoria secca
15/36 (5 possibilità di estrae il 6 e l'altro più bassa, 4 per estrarre il 5 e l'altro più bassa fino a (2,1))
Vittoria dopo primo pareggio (6 modi) poi conto le possibilità di vittoria come sopra
$60/30^2$
Vittoria dopo 2 (6·5 modi di scegliere le due estrazioni uguali)
$180/120^2$
Dopo 3 (120 modi)
$360/360^2$
Dopo 4 (360 modi)
$360/720^2$
Che sommate danno effettivamente 719/1440, quindi la risposta è 2159.
In alternativa, si può osservare la situazione simmetrica del gioco e il fatto che la probabilità di pareggio è 1/6!

[Risposta **2159**]



3.- Noto che: AC = 14 cm , OC = 25 cm , CAD triangolo equilatero e quindi CH = HD = 7 cm , AH = $7\sqrt{3}$ cm .
Pongo OA = x = lato esagono. Per il teorema di Pitagora
$CH^2 = OC^2 - OH^2$; sostituendo si ottiene $x^2 + 14\sqrt{3}x - 429 = 0$; da cui $OA = x = \left(24 - 7\sqrt{3}\right)cm$.

Perimetro richiesto: $6x = 6\left(24 - 7\sqrt{3}\right)cm \cong 71cm$.

[Risposta **71**]

4.- I possibili numeri sono: $88 = 2^3 \cdot 11$, $56 = 2^3 \cdot 7$, $40 = 2^3 \cdot 5$, $24 = 2^3 \cdot 3$, $16 = 2^3 \cdot 2$; $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $36 = 2^2 \cdot 3 \cdot 3$; $81 = 3^4$; $54 = 3^3 \cdot 2$; $90 = 3^2 \cdot 2 \cdot 5$; $100 = 2^2 \cdot 5^2$. La loro somma vale 729.

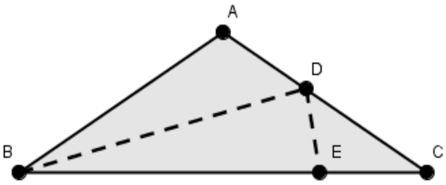
[Risposta **729**]

5.- $n^4 + 4 = \left(n^2+2\right)^2 - 4n^2 = \left(n^2 - 2n + 2\right)\left(n^2 + 2n + 2\right)$. Ora $n^2 + 2n + 2 > 1$, quindi $n^4 + 4$ è primo solo se $n^2 - 2n + 2 = 1$, cioè se $n = 1$.

[Risposta **1**]

6- Detta $X = \pi ab$ l'area dell'ellisse di semiassi a e b con $a = 2b$, detta S l'area della superficie comune alle due figure: $S : X = 11:35$, mentre $S = 14/25 \cdot 6655\pi\ cm^2$. Segue: $X = 11858\ \pi\ cm^2 = \pi ab = 2\pi b^2$; da cui: $a \cong 154$ cm .

[Risposta **154**]



7.- Poniamo $ABD = DBC = \beta$; $BAC = \alpha$. Allora $\alpha + 4\beta = 180°$.
Sia E il punto di BC tale che $BE = BD$. Da $BC = BE + EC$, $BC = BD + AD$ segue $EC = AD$. Per il teorema della bisettrice: $AD/DC = AB/BC$; ma $EC = AD$ e $AB = AC$, pertanto i triangoli EDC e BAC sono simili e quindi $EDC = 2\beta$. Nel triangolo BCD: $\beta + 2\beta + 2\beta + (180° - \beta)/2 = 180°$.
Da cui $\beta = 20°$, $\alpha = 100°$.

[Risposta **100**]

8.- Per ognuno dei 3 portieri ci sono $\binom{7}{2}$ difensori oltre a Stop, $\binom{7}{5}$ centrocampisti e 4 attaccanti oltre a Goal. Quindi il numero richiesto è $3\cdot\binom{7}{2}\cdot\binom{7}{5}\cdot 4 = 5292$.

[Risposta **5292**]

9.- Un palindromo di 4 cifre è del tipo: a·1000 + b·100 + b·10 + a = 1001a + 110 b ; un altro palindromo del genere sarà: 1001 c + 110d; la loro differenza: 1001 (a – c) + 110 (b – d) è ancora un tale palindromo in questi casi:

- a – c = 1 e b – d = -9 ; allora 1001 – 990 = 11 e avremo l'anno 2002 + 11 = 2013;
- a – c = 1 e b – d = -8 ; allora 1001 – 880 = 121 e avremo l'anno 2002 + 121 = 2123.

Il numero richiesto è quindi 2123.

[Risposta **2123**]

10. E' sufficiente moltiplicare il numero di modi di scegliere i le quattro coppie uguali $\binom{9}{4}$ per il numero di dismutazioni delle rimanenti 5 coppie, pari a 44, ottenendo la risposta 5544.

[Risposta **5544**]

11.- Moltiplicando e dividendo $p(x)$ per $1 - x$, possiamo riscriverlo come

$$\frac{1 - x^{1024}}{1 - x} = \sum_{i=0}^{1023} x^i$$

Quindi $p(3)\sum_{i=0}^{1023} 3^i$ e ciascuno porta un contributo 1 alla scrittura in base 3 (senza cancellazioni), quindi la risposta è 1024.

[Risposta **1024**]

12. Osserviamo innanzitutto che la prima condizione non può essere soddisfatta: il numero richiesto è congruo a 3 modulo 24, quindi in particolare è divisibile per 3, quindi non può essere congruo a 1 modulo 9 (né a 5 modulo 6). Consideriamo la seconda: essendo 1001=7*11*13, la condizione sulla divisione per 13 è automaticamente soddisfatta, quindi basta risolvere il sistema dato dalla prima e dalla terza condizione con il teorema cinese del resto: $x \equiv 1 \; mod \; 1001, x \equiv 3 \; mod \; 4$. Scrivendo x=1001 A+4B e sostituendo, si ha $1001A \equiv \square \equiv 3 \; mod \; 4$ e $250 * 4B \equiv -B \equiv 250 \; mod \; 1001$, da cui $B \equiv 751 \; mod \; 4$, quindi x=6007, unica modulo 4004=4*1004, quindi la minima è 2003.

[Risposta **2003**]

13.- L'equazione è scrivibile come: $2x^2 - 11xy + 5y^2 + 220 = 0$, che, vista come equazione di secondo grado in x, impone che $81y^2 - 1760 = n^2$, n naturale; cioè $(9y + n)(9y - n) = 1760 = 2^5\cdot5\cdot11$. Il sistema $9y + n = a$, $9y + n = b$ ha soluzione $(y,n) = ((a+b)/18, (a-b)/2)$; a e b devono essere multipli di 2.
Esaminando i casi possibili, si arriva alle soluzioni (x,y)=(8,6), (25,6), (31,7), (25,49) (e alle loro opposte).
La somma richiesta quindi è: (14+31+38+74)·2 = 314.

[Risposta **314**]

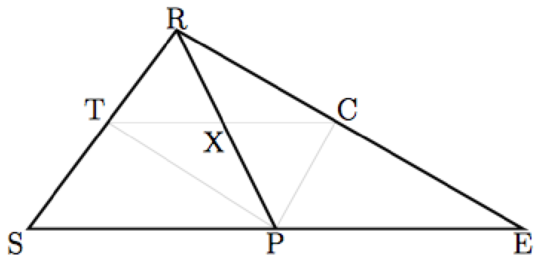
14.- Risulta: $v\cdot c = 676 - p^2 = 26^2 - p^2 = (26 - p)(26 + p)$, con $p < 24$, p primo che può assumere solo valori dell'insieme {2,3,5,7,11,13,17,19,23}. Pertanto le possibili terne ordinate (p,v,c) sono (3,23,29) e (3,29,23) e la somma richiesta sarà: 3·23·29 + 3·29·23 = 4002.

[Risposta **4002**]

15.- Dobbiamo trovare il più grande n tale che $k^2 = 2^{2018}(1 + 2^{1524}) + 2^n$. Detto $a = \frac{k}{2^{1009}}$, abbiamo $2^{n-2018} = a^2 - (1 + 2^{1524})$. Quindi a deve essere dispari, diciamo $a=2b+1$, da cui $2^{n-2020} = b(b+1) - 2^{1522}$, quindi $b(b+1) = 2^{1522}(2^{n-3542} + 1)$. Se b è pari, si ha $n=1522$+3542=5064, mentre il caso b dispari non fornisce soluzioni.

[Risposta **5064**]

16.-

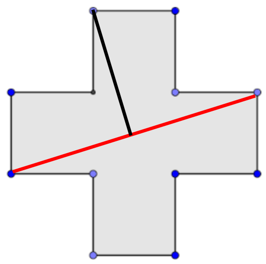


Dal teorema della bisettrice, si ha che
$\frac{RT}{TS} = \frac{RP}{PS} = \frac{RP}{PE} = \frac{RC}{CE}$.
Per il teorema di Talete, TC è parallelo a SE e si ha per similitudine tra RTX e RSP che $\frac{TX}{SP} = \frac{RT}{RS}$.
Ma $\frac{RP}{PS} = \frac{9}{16}$, da cui $\frac{RT}{RS} = \frac{9}{25}$, quindi
$TX = \frac{9}{25} \cdot SP = 57.6$, quindi la soluzione è 57.

[Risposta **57**]

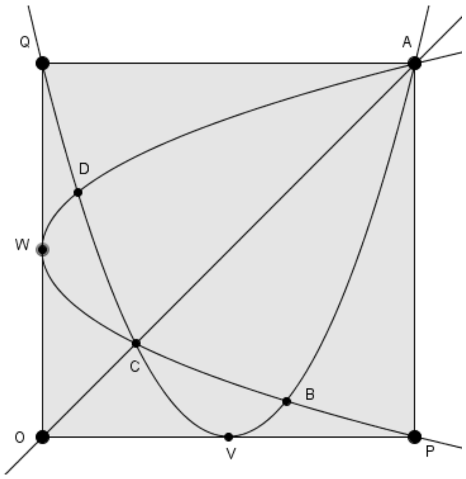
17.- Al passo n si ottiene un poligono di 2^n lati, chiamiamo l_n la lunghezza del lato al passo n. Partendo dal quadrato e considerando la circonferenza in cui è inscritto, si ha $2^2 < 4\sqrt{2} < l_n 2^n < 2\pi < 2^3$, quindi, per ogni n, si ha $\frac{1}{2^{n-2}} < l_n < \frac{1}{2^{n-3}}$. Quindi, il minimo n è 2019+3=2022**.**

[Risposta **2022**]



18.- Primo taglio: segue la diagonale in rosso del dodecagono; secondo taglio: segue la semidiagonale in nero del dodecagono (vd figura). Col teorema di Pitagora si calcola la misura della diagonale: $50\sqrt{10}$ mm; allora il perimetro del rettangolo che ha per dimensioni la diagonale e la semidiagonale risulta: $150\sqrt{10}$ mm, quindi la risposta è 160.

[Risposta **160**]



19.- Scelgo come unità il dam = 100 m e uso il sistema cartesiano xOy in figura in cui: *O*(0,0), *A*(1,1). *V*(1/2,0), *W*(0,1/2) sono i vertici delle 2 parabole menzionate di rispettive equazioni y = (2x-1)² , x = (2y-1)² , simmetriche rispetto alla bisettrice *OA* di equazione y = x. Usando la citata simmetrie e le equazioni sopra indicate, si deduce che: *C*(1/4,1/4) , $B\left(\frac{3+\sqrt{5}}{8}, \frac{3-\sqrt{5}}{8}\right)$, $D\left(\frac{3-\sqrt{5}}{8}, \frac{3+\sqrt{5}}{8}\right)$; *ABCD* ha le diagonali ortogonali e pertanto l'area di *ABCD* è $\frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{4} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4} \text{dam}^2 = \frac{3\sqrt{5}}{16} \cdot 10000\,\text{m}^2 \cong 4192\,\text{m}^2$

[Risposta **4192**]

20.- Riscriviamo l'equazione data come $(x^{2019})^2 = (x + 2019)^2$, da cui $x^{4038} - 4038x = x^2 + 2019^2$ e osserviamo che $x^{2019} - x - 2019$ è negativo per x=1, positivo per x=2. Quindi x si può scrivere come 1+c, con c che si verifica non portare contributo alle cifre richieste.
La risposta è quindi $2019^2 + 1 = (2000 + 19)^2 + 1 = 6000 + 19^2 + 1$ modulo 10000, quindi la riposta è 6362.

[Risposta **6362**]